Über die Hatzidakis'sche Transformation der Flächen konstanter Krümmung.

INAUGURAL-DISSERTATION,

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der

Kgl. Bayer. Ludwig-Maximilians-Universität
zu München

vorgelegt am 15. Juli 1913

von

Ernst Richter.

Druck von R. Oldenbourg in München.
1913.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548303_0011

Über die Hatzidakis'sche Transformation der Flächen konstanter Krümmung.

INAUGURAL-DISSERTATION,

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der

Kgl. Bayer. Ludwig-Maximilians-Universität
zu München

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

vorgelegt am 15. Juli 1913

von

Ernst Richter.

Druck von R. Oldenbourg in München.
1913.

Meinen lieben Eltern

in Dankbarkeit gewidmet.

Einleitung und Literaturübersicht.[1]

Die allgemeine Integration der Differentialgleichung der Flächen konstanter Gaußscher Krümmung ist bekanntlich noch heute ein ungelöstes Problem. Man ist daher bestrebt, auf einem anderen Wege die Zahl der bekannten Flächenfamilien konstanter Krümmung zu vermehren, indem man Methoden sucht, um aus einer gegebenen Fläche dieser Art eine oder unendlich viele neue Flächen derselben Art herzuleiten — Transformationen der Flächen konstanter Krümmung.

Die drei hauptsächlichsten derartigen Transformationen sind: die Bianchische (»Komplementärtransformation«), die Liesche und die Hatzidakissche. Von ihnen wurden die beiden ersteren wenige Jahre später zur sog. Baecklundschen Transformation vereinigt und gaben in der Folgezeit Anlaß zur Entstehung einer umfangreichen Literatur, sowie auch zur Durchführung von Beispielen (Anwendung auf die pseudosphärischen Rotationsflächen). Sie erwiesen sich, wenn man sich auf das reelle Gebiet beschränken wollte, als nur auf pseudosphärische Flächen anwendbar. Erst 1899 wurde die Baecklundsche Transformation von Guichard und von Bianchi zu einer neuen, auf sphärische Flächen anwendbaren Transformation erweitert.

Seltener wird dagegen die Hatzidakissche Transformation erwähnt. Es erscheint daher passend, eine kurzgefaßte Inhaltsangabe der diesbezüglichen Arbeiten zu geben.

---

[1]) Vgl. A. Voß: Abbildung und Abwickelung zweier Flächen aufeinander. Enzyklopädie der math. Wissensch. III D 6a, S. 355—440 (spez. S. 418).

In Hatzidakis' Arbeit[1]) wird zunächst der Satz bewiesen, daß jede Fläche konstanter Krümmung von ihren Asymptotenlinien in unendlich kleine Rhomben eingeteilt wird; dann erfolgt die Herleitung folgender Transformation: Denkt man sich eine Fläche Σ von konstantem Krümmungsmaß in derartigen geodätischen Parametern u, v dargestellt, daß jede geodätische Linie durch die lineare Relation $C_1 u + C_2 v + C_3 = 0$ gegeben ist und daß die Diskriminante des Längenelements gleich $\frac{1}{(1+u^2+v^2)^3}$ wird, so folgen aus den Codazzischen Gleichungen die Integrabilitätsbedingungen gewisser Differentiale, welche die Koordinaten einer neuen Fläche Σ_1 von konstanter Krümmung mittels bloßer Quadraturen liefern. Dabei bedeuten u, v auf Σ_1 die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial z_1}{\partial y_1}$; die geodätischen Linien von Σ gehen über in die Schattenlinien von Σ_1, und durch u und v ist das sphärische Bild von Σ_1 ohne weiteres gegeben.

Hier knüpft die geometrische Deutung an, welche Lie[2]) für diese Transformation fand. Nach Lie teilen nicht nur die Asymptotenlinien eine Fläche konstanter Krümmung sondern auch ihre sphärischen Bilder die Kugel in unendlich kleine Rhomben, und umgekehrt entspricht jeder derartigen Einteilung der Kugel eine durch Quadraturen auffindbare Fläche konstanter Krümmung. Ist nun die Fläche Σ mit ihren Asymptotenlinien gegeben, so können wir die Einheitskugel sowohl durch Abwicklung als auch durch sphärische Abbildung von Σ in infinitesimale Rhomben einteilen. Die so erhaltenen Einteilungen sind insofern reziprok, als zwar die Seitenlängen entsprechender Rhomben gleich, aber entsprechende Winkel supplementär sind. Daraus ergibt sich für die Transformation folgende Deutung: Wir verbiegen zunächst Σ auf die Kugel und bestimmen dann durch Quadraturen diejenige Fläche Σ_1, deren Asymptotenlinien die durch jene Abwickelung

---

[1]) J. N. Hatzidakis: Über einige Eigenschaften der Flächen mit konstantem Krümmungsmaß. Crelle Journ. f. Math., Bd. 88 (1879).

[2]) S. Lie: Zur Theorie der Flächen konstanter Krümmung. Archiv for Mat. og Naturvidenskap 4, Kristiania 1879.

erhaltene Rhombeneinteilung der Kugel als sphärisches Bild haben. Daraus folgt der involutorische Charakter der Transformation und die Erhaltung von Asymptoten- und Krümmungslinien.

Diese Deutung der Transformation wird bei Bianchi[1]) verwendet. Die Ausgangsfläche Σ wird hier auf Krümmungslinien bezogen und gezeigt, daß sich in diesem Falle das Linienelement auf die Form bringen läßt: $ds^2 = \cosh^2\vartheta\,(u,v)\,du^2 + \sinh^2\vartheta\,(u,v)\,dv^2$.

Das Linienelement der Bildkugel wird in diesem Falle: $ds_0^2 = \sinh^2\vartheta\;du^2 + \cosh^2\vartheta\;dv^2$. Es wird nun diejenige Fläche konstanter Krümmung, Σ_1, gesucht, deren Krümmungslinien sich nach Abwickelung auf die Kugel mit den sphärischen Bildern der Krümmungslinien von Σ decken. Man sieht jedoch, daß diese Interpretation zunächst nur für Flächen positiven Krümmungsmaßes gilt[2]).

In einer Arbeit von L. P. Eisenhart[3]) wird die Transformation auf eine neue Art und Weise aus den Fundamentalgleichungen hergeleitet. Sie tritt dann in einer Form auf, welche eine Verallgemeinerung der bei Bianchi angegebenen darstellt, woraus ihre Identität mit der Hatzidakisschen folgt. Von Interesse ist dort die Bemerkung, daß die Transformation ersetzt werden kann durch eine zweimalige Anwendung einer neuen, von Eisenhart angegebenen Transformation, so daß sich also jetzt aus einer gegebenen sphärischen Fläche Σ drei neue Flächen Σ', Σ_1, Σ_1' herleiten lassen. Aber alle erwähnten Transformationsarten, mit Ausnahme der von Hatzidakis angegebenen, liefern nicht direkt die Koordinaten, sondern erst die sechs Fundamentalgrößen der gesuchten Fläche. In der genannten Eisenhartschen Arbeit findet sich auch als einziges bis jetzt durchgerechnetes Beispiel eine Anwendung der Hatzidakisschen

[1]) L. Bianchi: Vorlesungen über Differentialgeometrie (deutsch von Max Lukat), 1. Aufl., 1899, § 264.

[2]) Ein Teil der erwähnten Resultate findet sich auch bei J. Weingarten: Über die Theorie der aufeinander abwickelbaren Oberflächen; Festschrift der K. techn. Hochschule Berlin zur Feier der Einweihung ihres neuen Gebäudes am 2. November 1884, S. 1—43, speziell S. 39.

[3]) Surfaces of constant curvature and their transformations; Transactions of the Americ. Math. Soc. Bd. 6 (1905), S. 472 ff.

Transformation auf die Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung.

Außerdem erwähnt Eisenhart[1]) noch folgende Eigenschaft der Transformation: Man kann die beiden sphärischen Flächen Σ und Σ_1 als assoziiert auffassen zu zwei Flächen S und S_1, die zueinander in folgender Beziehung stehen: S kann auf S_1 so längentreu abgebildet werden, daß die Asymptotenlinien von S auf S_1 ein konjugiertes System bilden. Da man, wie gezeigt wird, von Σ zu den Fundamentalgrößen von S_1 gelangen kann, und von den Koordinaten der Fläche S_1 durch Quadraturen zu denen von Σ_1, so ergibt sich ein neuer Weg, um von einer sphärischen Fläche Σ zu ihrer Transformierten Σ_1 zu gelangen. Allein dieser Weg setzt, wie Eisenhart zeigt, voraus, daß man auf Σ ein »konjugiertes System mit gleichen Invarianten« kennt.

In der vorliegenden Arbeit soll nun zunächst, unter besonderer Berücksichtigung der pseudosphärischen Flächen, eine zusammenfassende und einheitliche Darstellung der Hatzidakisschen Transformation gegeben werden, wobei sich neben einigen neuen Sätzen ein direkter analytischer Übergang zwischen den verschiedenen erwähnten Formen der Transformation bieten wird. Sodann sollen die entwickelten Theorien an Beispielen ihre Anwendung finden. Dabei wird sich zeigen, daß von reellen pseudosphärischen Flächen zwar nie reelle, wohl aber mitunter imaginäre Teile in reelle pseudosphärische Flächenteile übergehen können.

Bezeichnungen.

Die rechtwinkligen Koordinaten eines Flächenpunktes stellen wir als Funktionen zweier Parameter u, v dar und setzen:

$$E = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \quad F = \sum x_u x_v, \quad G = \sum x_v^2,$$

wobei $\Delta = \sqrt{EG - F^2}$ im reellen Fall stets positiv sein soll.

[1]) Applicable surfaces with asymptotic lines of one surface corresponding to a conjugate system of another. Transactions of the Americ. Math. Soc. 8 (1907), S. 113—134.

Die Richtungskosinusse der Flächennormalen seien:

$$X = \frac{1}{\Delta}(y_u z_v - y_v z_u) \qquad Y = \frac{1}{\Delta}(z_u x_v - z_v x_u),$$

$$Z = \frac{1}{\Delta}(x_u y_v - x_v y_u);$$

dann sind die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung definiert durch:

$$D = \sum X x_{uu} \qquad D' = \sum X x_{uv} \qquad D'' = \sum X x_{vv}$$

und das Krümmungsmaß durch:

$$k = \frac{1}{R^2} = \frac{DD'' - D'^2}{\Delta^2} = \frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}} \varrho^{\mathrm{II}}},$$

wo ϱ^{I} und ϱ^{II} die Hauptkrümmungsradien bedeuten.

Setzen wir:

$$x_{uu} = A x_u + A_1 x_v + D X \qquad x_{uv} = B x_u + B_1 x_v + D' X$$
$$x_{vv} = C x_u + C_1 x_v + D'' X,$$

sowie analoge Gleichungen in y und z, so ist:

$$A = \frac{1}{2\Delta^2}\{G E_u - 2 F F_u + E_v F\}$$

$$B = \frac{1}{2\Delta^2}\{G E_v - F G_u\}$$

$$C = \frac{1}{2\Delta^2}\{-G G_u + 2 G F_v - F G_v\}$$

$$A_1 = \frac{1}{2\Delta^2}\{-F E_u + 2 E F_u - E E_v\}$$

$$B_1 = \frac{1}{2\Delta^2}\{E G_u - F E_v\}$$

$$C_1 = \frac{1}{2\Delta^2}\{E G_v - 2 F F_v + F G_u\}.$$

Nun lauten die Fundamentalgleichungen:

$$\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} + A D' - B D + A_1 D'' - B_1 D' = 0 \quad . \quad 1)$$

$$\frac{\partial D'}{\partial v} - \frac{\partial D''}{\partial u} + B D' - C D + B_1 D'' - C_1 D' = 0 \quad . \quad 2)$$

$$\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u} + A_1 C - B B_1 + F k = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Ihr Bestehen ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Fundamentalgrößen E, F, G, D, D', D'' eine Fläche definieren. Bilden die Parameterkurven ein orthogonales System, so verwenden wir an Stelle von 3) die äquivalente Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)$$
$$=-k\sqrt{EG}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\cdot(DD''-D'^2) \quad . \quad . \quad . \quad 3\,a)$$

Führen wir an Stelle von u, v die neuen Parameter $\bar{u}=\Phi(u,v)$ $\bar{v}=\Psi(u,v)$ ein, so wollen wir immer setzen:

$$\left.\begin{aligned} u &= P(\bar{u},\bar{v}) & \frac{\partial P}{\partial u} &= P_1 & \frac{\partial P}{\partial v} &= P_2 \\ v &= Q(u,v) & \frac{\partial Q}{\partial u} &= Q_1 & \frac{\partial Q}{\partial v} &= Q_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 4)$$

Es werden dann die Fundamentalgrößen in bezug auf die neuen Parameter:

$$\left.\begin{aligned} E &= EP_1^2+2FP_1Q_1+GQ_1^2 \\ &= \frac{1}{\delta^2}\left\{E\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\right)^2-2F\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}+G\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial u}\right)^2\right\} \\ F &= EP_1P_2+F(P_1Q_2+Q_1P_2)+GQ_1Q_2 \\ &= -\frac{1}{\delta^2}\left\{E\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}-F\left(\frac{\partial u}{\partial u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}\right)+G\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial u}\right\} \\ G &= EP_2^2+2FP_2Q_2+GQ_2^2 \\ &= \frac{1}{\delta^2}\left\{E\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\right)^2-2F\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}+G\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\right)^2\right\} \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

$$\left.\begin{aligned} D &= DP_1^2+2D'P_1Q_1+D''Q_1^2 \\ &= \frac{1}{\delta^2}\left\{D\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial v}\right)^2-2D'\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial v}+D''\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2\right\} \\ D' &= DP_1P_2+D'(P_1Q_2+Q_1P_2)+D''Q_1Q_2 \\ &= -\frac{1}{\delta^2}\left\{D\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v}-D'\left(\frac{\partial u}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}\right)+D''\frac{\partial u}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial u}\right\} \\ \bar{D}'' &= DP_2^2+2D'P_2Q_2+D''Q_2^2 \\ &= \frac{1}{\delta^2}\left\{D\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}\right)^2-2D'\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial v}+D''\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\right)^2\right\} \end{aligned}\right\} \quad 5\,a)$$

also

$$\left.\begin{aligned} \bar{\Delta}^2 &= \Delta^2 \cdot \begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{vmatrix}^2 = \Delta^2 : \delta^2 \\ \text{und} \\ \bar{D}\,\bar{D}'' - \bar{D}'^2 &= (D\,D'' - D'^2) \cdot \begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ Q_1 & Q_2 \end{vmatrix}^2 = \frac{D\,D'' - D'^2}{\delta^2} \end{aligned}\right\} 5b)$$

wenn $\delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{vmatrix}$ gesetzt ist.

Endlich lautet die Differentialgleichung der geodätischen Linien:

$$\left.\begin{aligned} 2\,\Delta^2 \begin{vmatrix} du & dv \\ d^2u & d^2v \end{vmatrix} &+ du^3\,(2\,E F_u - E E_v - F E_u) \\ &+ du^2\,dv\,(2\,E G_u + 2\,F F_u - 3\,F E_v - G E_u) \\ &+ du\,dv^2\,(3\,F G_u + E G_v - 2\,G E_v - 2\,F F_v) \\ &+ dv^3\,(F G_v - 2\,G F_v + G G_u) = 0 \end{aligned}\right\} 6)$$

Kapitel I.

Darstellung der Hatzidakisschen Transformation in ihrer ursprünglichen Form.

Bevor wir in die eigentliche Behandlung des Themas eintreten, ist eine kurze Voruntersuchung nötig. Wie bereits erwähnt, setzt Hatzidakis bei der Herleitung seiner Transformation voraus, die Fläche Σ (von konstantem Krümmungsmaß) sei auf solche Parameter gebracht, daß erstens jede geodätische Linie durch die Gleichung

$$C_1\,u + C_2\,v + C_3 = 0 \;\; (C_1 \cdots \text{Konstanten}) \;.\;.\;. \quad 7)$$

ausgedrückt sei, und daß zweitens

$$\Delta^2 = \frac{R^4}{w^6} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad 8)$$

sei, wo wir $w^2 = 1 + u^2 + v^2$ gesetzt haben.

Da diese beiden Eigenschaften invariant gegen Biegung sind und alle Flächen konstanter Krümmung auf die (reelle oder imaginäre) Kugel abwickelbar sind, so genügt es, diese Voraussetzung für den Fall der Kugel zu betrachten.

Die Kugel ist gegeben durch:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

setzen wir:

$$u = \frac{x}{z} \qquad v = \frac{y}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

so ergibt sich

$$x = \frac{R\,u}{w} \qquad y = \frac{R\,v}{w} \qquad z = \frac{R}{w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

als die verlangte Parameterdarstellung für die Kugel. Es ist

$$E = R^2\,\frac{1+v^2}{w^4} \qquad F = -\,R^2\,\frac{u\,v}{w^4} \qquad G = R^2\,\frac{1+u^2}{w^4} \qquad \Delta^2 = \frac{R^4}{w^6} \qquad 12)$$

Verschieben wir die Kugel auf ∞^3 Arten in sich selbst, so kommt diese Operation offenbar einer Drehung des Koordinatensystems gleich; dann lauten die ursprünglichen Koordinaten des Punktes x, y, z, ausgedrückt durch die neuen Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$:

$$\begin{aligned} x &= a_1\,\bar{x} + b_1\,\bar{y} + c_1\,\bar{z} \qquad y = a_2\,\bar{x} + b_2\,\bar{y} + c_2\,\bar{z} \\ z &= a_0\,\bar{x} + b_0\,\bar{y} + c_0\,\bar{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13) \end{aligned}$$

wo bekanntlich die Koeffizienten den Bedingungen genügen müssen:

$$\left.\begin{array}{lll} a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1 & a_0\,b_0 + a_1\,b_1 + a_2\,b_2 = 0 & \left|\begin{array}{ccc} c_0 & c_1 & c_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{array}\right| = 1 \\ b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1 & a_0\,c_0 + a_1\,c_1 + a_2\,c_2 = 0 & \\ c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1 & b_0\,c_0 + b_1\,c_1 + b_2\,c_2 = 0 & \end{array}\right\} 14)$$

Stellen wir jetzt die Kugel in den neuen Koordinaten mittels der neuen Parameter $\bar{u}, \bar{v}$ ebenso dar wie in Gleichung 11), so ergibt sich nach 10) und 13) als diejenige Parametertransformation, welche der Verschiebung der Kugel in sich entspricht:

$$u = \frac{a_1\,u + b_1\,v + c_1}{a_0\,u + b_0\,v + c_0} \qquad v = \frac{a_2\,u + b_2\,v + c_2}{a_0\,u + b_0\,v + c_0} \quad . \quad . \quad 15)$$

Nun ist bekanntlich die allgemeinste Parametertransformation, bei welcher die geodätischen Linien noch durch die ganze lineare

Relation dargestellt werden, gegeben durch 15), freilich zunächst ohne daß die Gleichungen 14) befriedigt zu sein brauchen. Lediglich die letzte dieser Gleichungen wollen wir als erfüllt annehmen, da wir uns unbeschadet der Allgemeinheit beide Brüche mit der dritten Wurzel aus der Determinante gekürzt denken können.

Damit wir nun auf eine — auf die Kugel abwickelbare — Fläche die H a t z i d a k i s sche Transformation anwenden können, muß auch noch die Gleichung 8) erfüllt sein. Das Bestehen der drei ersten Gleichungen 12) wird dabei nicht vorausgesetzt. Da sich aber für unsere Untersuchungen gerade die Formeln 12) bequem erweisen werden, so wollen wir sehen, ob sie von den Voraussetzungen 7) und 8) unabhängig sind oder aus ihnen folgen.

Setzt man:

$$A_0 = a_0\,\bar{u} + b_0\,v + c_0 \qquad A_1 = a_1\,\bar{u} + b_1\,v + c_1$$
$$A_2 = a_2\,\bar{u} + b_2\,v + c_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

in 15) ein, so wird mit den in 4) definierten Bezeichnungen:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{a_1 A_0 - a_0 A_1}{A_0^2} \qquad P_2 = \frac{b_1 A_0 - b_0 A_1}{A_0^2} \\ Q_1 &= \frac{a_2 A_0 - a_0 A_2}{A_0^2} \qquad Q_2 = \frac{b_2 A_0 - b_0 A_2}{A_0^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 17)$$

Da nun $\bar{\Delta}^2 = \dfrac{R^4}{\bar{w}^6}$ werden muß, so folgt nach 5b):

$$\frac{R^4}{\bar{w}^6} = \frac{R^4}{w^6}\cdot(P_1 Q_2 - Q_1 P_2)^2$$
$$= \frac{R^4}{[\bar{u}^2\cdot\Sigma a_0^2 + \bar{v}^2\cdot\Sigma b_0^2 + \Sigma c_0^2 + 2\,\bar{u}\,\bar{v}\,\Sigma a_0 b_0 + 2\,\bar{u}\,\Sigma a_0 c_0 + 2\,\bar{v}\,\Sigma b_0 c_0]^3}\cdot\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 .$$

Da aber

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \bar{u}\cdot\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} + v\cdot\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

und die letzte Determinante gleich Δ gesetzt ist, so folgt:

$$\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 1 = \bar{u}^2\,(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2) + \bar{v}^2\,(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2)$$
$$+ (c_0^2 + c_1^2 + c_2^2) + 2\,\bar{u}\,\bar{v}\,(a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2)$$
$$+ 2\,\bar{u}\,(a_0 c_0 + a_1 c_1 + a_2 c_2) + 2\,v\,(b_0 c_0 + b_1 c_1 + b_2 c_2) \qquad 18)$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleichung unmittelbar die sechs ersten Beziehungen 14) ergeben. Die einzige auf Grund der Voraussetzungen 7) und 8) noch erlaubte Parametertransformation ist sonach durch 15) zusammen mit 14) bestimmt und bedeutet geometrisch nichts anderes als eine Verschiebung der Kugel und somit der Fläche Σ in sich selbst. Da dabei die Formeln 12) bestehen bleiben, so können wir fortan die Hatzidakissche Transformation unbedenklich anstatt auf 7) und 8) auch auf 7) und 12) aufbauen.

Erwähnt sei noch, daß für reelle Punkte $\Delta = \left|\begin{matrix} R^2 \\ w^3 \end{matrix}\right|$ $(w = \pm\sqrt{1+u^2+v^2})$ wird, wenn u und v reell sind. Für $\Delta^{1/3}$ erhalten wir $\frac{R^{2/3}}{w}$ und zwei komplexe Werte, von denen wir absehen wollen, weil sie uns zu keinen reellen Flächen führen. Es wird also:

$$\Delta^{4/3} = \frac{R^{8/3}}{w^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12a)$$

Nunmehr leiten wir die Transformation nach der Methode von Hatzidakis in unseren Bezeichnungen her[1]).

Soll die Differentialgleichung 6) der geodätischen Linien durch die ganze lineare Relation 7) erfüllt sein, so müssen die Koeffizienten der Potenzen von du und dv in ihr verschwinden; also

$$\alpha)\ A_1 = 0 \quad \beta)\ 2B_1 - A = 0 \quad \gamma)\ -C_1 + 2B = 0 \quad \delta)\ C = 0 \qquad 19)$$

Ferner gelten die Identitäten:

$$\alpha)\ \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \Delta^2}{\partial u} = A + B_1 \qquad \beta)\ \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \Delta^2}{\partial v} = B + C_1 \qquad 20)$$

Verbinden wir einerseits 19 β) mit 20 α), anderseits 19 γ) mit 20 β), so folgt:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{3}\frac{\partial \ln \Delta^2}{\partial u} & B &= \frac{1}{6}\frac{\partial \ln \Delta^2}{\partial v} & C &= 0 \\ A_1 &= 0 & B_1 &= \frac{1}{6}\frac{\partial \ln \Delta^2}{\partial u} & C_1 &= \frac{1}{3}\frac{\partial \ln \Delta^2}{\partial v} \end{aligned}\right\} \qquad 21)$$

[1]) Crelle Journ. Bd. 88 (l. c.).

Führen wir jetzt vorübergehend drei neue Funktionen δ, δ', δ'' von u und v ein durch die Gleichungen:

$$D = \Delta \cdot \delta \qquad D' = \Delta \cdot \delta' \qquad D'' = \Delta \cdot \delta'',$$

so gehen die Fundamentalgleichungen 1) und 2) über in:

$$\Delta_v \cdot \delta + \Delta\, \delta_v - \Delta_u \delta' - \Delta\, \delta_u' + A\, \Delta\, \delta' - B\, \Delta \delta + A_1 \Delta \delta'' - B_1 \Delta \delta' = 0$$

und

$$\Delta_v \delta' + \Delta \delta_v' - \Delta_u \delta'' - \Delta \delta_u'' + B\, \Delta \delta' - C\, \Delta \delta + B_1 \Delta \delta'' - C_1 \Delta \delta' = 0.$$

Berücksichtigen wir hier die beiden Identitäten:

$$\Delta_u = \Delta \cdot (A + B_1) \text{ und } \Delta_v = \Delta \cdot (B + C_1),$$

so erhalten alle Glieder der beiden Fundamentalgleichungen den nicht verschwindenden Faktor Δ. Daher wird aus ihnen unter Berücksichtigung von 21):

$$\left.\begin{aligned} \delta_v + \frac{\delta}{3} \cdot \frac{\partial \ln \Delta^2}{\partial v} &= \delta_u' + \frac{\delta'}{3} \frac{\partial \ln \Delta^2}{\partial u} \\ \delta_v' + \frac{\delta'}{3} \cdot \frac{\partial \ln \Delta^2}{\partial v} &= \delta_u'' + \frac{\delta''}{3} \frac{\partial \ln \Delta^2}{\partial u} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 22)$$

Ersetzen wir endlich die δ durch die drei neuen Funktionen von u und v:

$$\Delta = \Delta^{2/3} \cdot \delta = \frac{D}{\Delta^{1/3}} \quad \Delta' = \Delta^{2/3} \cdot \delta' = \frac{D'}{\Delta^{1/3}} \quad \Delta'' = \Delta^{2/3} \delta'' = \frac{D''}{\Delta^{1/3}} \quad 23)$$

so reduzieren sich die beiden ersten Fundamentalgleichungen auf:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial v} = \frac{\partial \Delta'}{\partial u} \qquad \frac{\partial \Delta'}{\partial v} = \frac{\partial \Delta''}{\partial u} \quad \ldots \quad 24)$$

Es gibt also eine Funktion $\varphi\,(u, v)$, für welche

$$\Delta\,(u, v) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \quad \Delta'\,(u, v) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} \quad \Delta''\,(u, v) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \quad 25)$$

ist, und diese Funktion φ ist bis auf eine ganze lineare Funktion von u und v bestimmt.

Ferner ergibt sich für das konstante Krümmungsmaß der Fläche Σ:

$$k = \frac{\Delta \Delta'' - \Delta'^2}{\Delta^{4/3}},$$

woraus nach 12 a) folgt:

$$\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\right)^2\right][1+u^2+v^2]^2 = \text{Const} \quad . \quad 26)$$

Jede Lösung φ dieser Differentialgleichung definiert nun bekanntlich[1]) eine neue Fläche konstanter Krümmung, Σ_1, wenn man setzt:

$$x_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \qquad y_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

$$z_1 = -\varphi + u\frac{\partial\varphi}{\partial u} + v\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\varphi + u\,x_1 + v\,y_1 \quad . \quad 27)$$

Damit ist Σ_1 nicht bloß der Gestalt nach sondern auch in einer ganz bestimmten Abbildung auf die Ausgangsfläche Σ gegeben; denn einem bestimmten Wertepaar u, v entspricht ein bestimmter Punkt x_1, y_1, z_1 von Σ_1.

Aus 25) und 27) folgt:

$$\left.\begin{aligned} d\,x_1 &= A\,du + A'\,dv \\ d\,y_1 &= A'\,du + A''\,dv \\ d\,z_1 &= (u\,A + v\,A')\,du + (u\,A' + v\,A'')\,dv = u\,d\,x_1 + v\,d\,y_1 \end{aligned}\right\} \quad 28)$$

Das sind drei vollständige Differentiale, für welche die Gleichungen 24) die Integrabilitätsbedingungen darstellen.

Durch Integration folgt:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \int (A\,du + A'\,dv) + C_1 \\ y_1 &= \int (A'\,du + A''\,dv) + C_2 \\ z_1 &= \int [(u\,A + v\,A')\,du + (u\,A' + v\,A'')\,dv] + C_3 \\ &\quad (C_1, C_2, C_3 \text{ willkürliche Konstanten}) \end{aligned}\right\} \quad 29)$$

womit die Bestimmung von φ für die Anwendung der Transformation überflüssig wird. Zugleich sieht man aus 29), daß wir ∞^3 kongruente, parallel orientierte Flächen Σ_1 erhalten, was auch unmittelbar aus 27) folgt, wenn man bedenkt, daß φ bloß bis auf eine ganze lineare Funktion bestimmt ist.

[1]) Gl. 26 folgt aus der Gleichung

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] : \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^2 = \text{Const},$$

wenn man auf diese die Legendresche Transformation anwendet.

Die Frage nach der Eindeutigkeit der Transformation ist damit noch nicht ganz erledigt. Es bleibt noch zu untersuchen, ob die Wahl anderer geodätischer Parameter auf Σ einen Einfluß auf die Fläche Σ_1 ausübt.

Die allgemeinste Parametertransformation, die bei unseren Voraussetzungen noch erlaubt ist, ist gegeben durch 15) mit 14). Die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung in bezug auf die neuen Parameter bestimmen sich aus den Formeln 5 a), in welchen P_1 usw. die Werte 17) haben. Aus 5 b) folgt[1]):

$$\bar{\Delta}^{1/3} = \frac{1}{A_0} \cdot \Delta^{1/3},$$

und somit:

$$\left.\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{\bar{D}}{\bar{\Delta}^{1/3}} = A_0 [A P_1^2 + 2 A' P_1 Q_1 + A'' Q_1^2] \\ \bar{A}' &= \frac{\bar{D}'}{\bar{\Delta}^{1/3}} = A_0 [A P_1 P_2 + A' (P_1 Q_2 + Q_1 P_2) + A'' Q_1 Q_2] \\ \bar{A}'' &= \frac{\bar{D}''}{\bar{\Delta}^{1/3}} = A_0 [A P_2^2 + 2 A' P_2 Q_2 + A'' Q_2^2] \end{aligned}\right\} \quad 30)$$

Nennen wir nun die Fläche, welche wir bei Anwendung der Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$ erhalten, $\bar{\Sigma}_1$ und ihre Koordinaten $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$, $\bar{z}_1$, so ist offenbar analog 28) zu bilden:

$$\begin{aligned} d x + A\, d\bar{u} + \bar{A}'\, dv \qquad & d\bar{y}_1 = A'\, d\bar{u} + \bar{A}''\, dv \\ d\bar{z} = \bar{u}\, d x_1 + v\, d y_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad & 31) \end{aligned}$$

Hier ersetzen wir du und dv durch

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} dv$$

und

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial u} du + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} dv,$$

ferner die $\bar{A}$ aus 30). Unter Berücksichtigung der Identitäten:

$$\begin{aligned} P_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + P_2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = 1 \qquad & P_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + P_2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} = 0 \\ Q_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + Q_2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = 0 \qquad & Q_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + Q_2 \frac{\partial v}{\partial v} = 1 \end{aligned}$$

[1]) Analog wie auf S. 13.

ergibt sich dann:

$$d x_1 = A_0 \{[A P_1 + A' Q_1] d u + [A' P_1 + A'' Q_1] d v\}$$
$$d \bar{y}_1 = A_0 \{[A P_2 + A' Q_2] d u + [A' P_2 + A'' Q_2] d v\}.$$

Nach 17) und weil

$$\frac{A_1}{A_0} = u \quad \text{und} \quad \frac{A_2}{A_0} = v$$

ist, folgt:

$$d \bar{x}_1 = [A \cdot (a_1 - a_0 u) + A' \cdot (a_2 - a_0 v)] d u + [A' \cdot (a_1 - a_0 u) + A'' (a_2 - a_0 v)] d v,$$

also nach 28):

$$d x_1 = a_1 d x_1 + a_2 d y_1 - a_0 d z_1$$

sowie analog:

$$d \bar{y}_1 = b_1 d x_1 + b_2 d y_1 - b_0 d z_1 \quad \ldots \quad 32)$$

und nach der dritten Gleichung 31):

$$d \bar{z}_1 = - c_1 d x_1 - c_2 d y_1 + c_0 d z_1$$

wenn man berücksichtigt, daß $d z_1 - u d x_1 - v d y_1 = 0$ ist.

Aus 14) ist ohne weiteres ersichtlich, daß die Koeffizienten von 32) eine Drehung des Koordinatensystems bedeuten. Die Fläche $\bar{\Sigma}_1$ ist also sowohl hinsichtlich ihrer Form als auch hinsichtlich ihrer Abbildung auf Σ identisch mit der Fläche Σ_1, nur erscheint sie in einer anderen Orientierung im Raum. Wollen wir die Orientierungsänderung, welche Σ_1 durch die Parametertransformation 15) erhalten hat, vergleichen mit der, welcher die Kugel (S. 12 f.) unterworfen wurde, so lassen sich nach einem bekannten Schema die beiden Koordinatentransformationen folgendermaßen darstellen[1]):

Kugel

	x	y	z
$\bar{x}$	a_1	a_2	a_0
$\bar{y}$	b_1	b_2	b_0
$\bar{z}$	c_1	c_2	c_0

Fläche Σ_1

	x_1	y_1	z_1
$\bar{x}_1$	a_1	a_2	$-a_0$
$\bar{y}_1$	b_1	b_2	$-b_0$
$\bar{z}_1$	$-c_1$	$-c_2$	c_0

[1]) Hier bedeutet also z. B. b_0 den Richtungskosinus $(z\,\bar{y})$, $-b_0$ den Richtungskosinus $(\bar{z}_1\,y_1)$.

Das Koordinatensystem $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ erhält man also aus dem Koordinatensystem $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in folgender Weise: Man denke sich das Koordinatensystem $(\bar{x}, y, \bar{z})$ an der $(x\,y)$-Ebene des ursprünglichen Systems (x, y, z) gespiegelt und ersetze dann die $(+\,\bar{x})$-Achse und $(+\,\bar{y})$-Achse durch ihre Spiegelbilder, dagegen die $(+\,z)$-Achse durch das Spiegelbild der $(-\,\bar{z})$-Achse. Darin kommt also die Tatsache zum Ausdruck, daß wir der Z-Richtung seit den Formeln 27) eine Vorzugsstellung eingeräumt haben, und daß wir durchaus nicht genötigt waren, uns die Koordinaten von Σ_1 gerade in der Form 27) zu geben. Das Krümmungsmaß von Σ_1 wäre vielmehr dasselbe geblieben, wenn wir uns die Koordinaten z. B. in der Form gegeben hätten:

$$x_1 = a_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + b_1 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + c_1 \left(-\varphi + u \frac{\partial \varphi}{\partial u} + v \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \text{ usw.}$$

Wir fassen zusammen:

Satz I: Die Hatzidakissche Transformation ist imstande, die neue Fläche in jeder räumlichen Lage und Orientierung zu liefern; die Orientierung der Transformierten hängt nur ab von der Wahl der Ausgangsparameter, und der Einfluß derselben erschöpft sich in der verschiedenen Orientierung der Transformierten.

Damit ist, was die Form der Flächen betrifft, die Eindeutigkeit der Transformation nachgewiesen.

Zur Berechnung der Fundamentalgrößen von Σ_1 hat man nach 28):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= A & \frac{\partial y_1}{\partial u} &= A' & \frac{\partial z_1}{\partial u} &= u A + v A' \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= A' & \frac{\partial y_1}{\partial v} &= A'' & \frac{\partial z_1}{\partial v} &= u A' + v A'' \end{aligned}\right\} \quad 33)$$

Bezeichnen wir die Fundamentalgrößen von Σ_1 mit E_1 usw., so wird:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= (1 + u^2) A^2 + (1 + v^2) A'^2 + 2 u v A A' \\ F_1 &= (1 + u^2) A A' + (1 + v^2) A' A'' + u v (A A'' + A'^2) \\ G_1 &= (1 + u^2) A'^2 + (1 + v^2) A''^2 + 2 u v A' A'' \end{aligned}\right\} \quad 34)$$

Aus der Ähnlichkeit dieser Gleichungen mit 5) folgt unmittelbar:

$$\Delta_1^2 = E_1 G_1 - F_1^2 = \begin{vmatrix} 1+u^2 & uv \\ uv & 1+v_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Lambda & \Lambda' \\ \Lambda' & \Lambda'' \end{vmatrix}^2,$$

sowie nach einfacher Rechnung:

$$\Delta_1^2 = R^{-8/3} \cdot \Delta^2 \text{ oder } \Delta_1 = k^{2/3} \cdot \Delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 35)$$

da wir im reellen wie imaginären Fall Δ und Δ_1 von gleichen Vorzeichen annehmen wollen und von den komplexen Werten von $k^{1/3}$ absehen[1]).

Nun bestimmen wir die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung von Σ_1 nach 33):

$$\Delta_1 D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Lambda}{\partial u} & \frac{\partial \Lambda'}{\partial u} & u\frac{\partial \Lambda}{\partial u} + v\frac{\partial \Lambda'}{\partial u} + \Lambda \\ \Lambda & \Lambda' & u\Lambda + v\Lambda' \\ \Lambda' & \Lambda'' & u\Lambda' + v\Lambda'' \end{vmatrix} = \Lambda(\Lambda\Lambda'' - \Lambda'^2) = \frac{D \cdot \Delta}{R^2}.$$

Also nach 35):

$$\left.\begin{aligned} D_1 = D \cdot R^{-\frac{2}{3}} \quad D_1' = D' \cdot R^{-\frac{2}{3}} \quad D_1'' = D'' \cdot R^{-\frac{2}{3}}\ ^{2}) \\ \text{speziell für } k = \frac{1}{R^2} = \pm 1: \\ D_1 = \pm D \quad D_1' = \pm D' \quad D_1'' = \pm D'' \end{aligned}\right\} \quad 36)$$

Berechnen wir jetzt das Krümmungsmaß von Σ_1, so folgt:

$$k_1 = \frac{1}{R_1^2} = \frac{D_1 D_1'' - D_1'^2}{\Delta_1^2} = \frac{1}{R^{2/3}} = k^{1/3} \quad . \quad . \quad . \quad 37)$$

Das Ergebnis, daß k und k_1 nicht übereinstimmen, ist nicht merkwürdig. Hätten wir doch in den Formeln 27) bis 29) einen beliebigen konstanten Faktor einführen können. Wollen wir aus der Transformation eine solche machen, die das Krümmungsmaß ungeändert läßt, so brauchen wir bloß in diesen Formeln die rechten

---

[1]) Wir nehmen also im folgenden immer $R^{2/3} \gtrless 0$ an, je nachdem $k = R^2 \gtrless 0$ ist.

[2]) Bezüglich der Invarianz dieser Gleichungen gegen Parametertransformation vgl. S. 28.

Seiten mit $R^{2/3}$ zu multiplizieren oder — und das wollen wir in der Folge bei der Formulierung der Sätze tun —

$$k = \frac{1}{R^2} = \pm 1$$

annehmen[1]).

Satz II: Ist auf einer Fläche Σ mit der konstanten Krümmung ± 1 ein geodätisches Parametersystem bekannt, welches den durch Gleichung 7) und 8) gestellten Bedingungen genügt, so erfordert die Auffindung einer neuen Fläche, Σ_1, von derselben konstanten Krümmung nach 23) und 29) nur Quadraturen. Diese Transformation ist eindeutig und punktweise.

Die hauptsächlichste Schwierigkeit bei der Anwendung dieser Transformation liegt also darin, die Fläche Σ auf entsprechende Parameter zu bringen. Dies ist aber offenbar identisch mit dem Problem, die Fläche Σ auf die Kugel abzuwickeln. Nehmen wir an, die Koordinaten von Σ seien in irgendwelchen Parametern U, V gegeben, so daß E, F, G als Funktionen von U und V bekannt sind! Kennen wir nun schon eine Darstellung der Kugel, in welcher E, F, G dieselben Funktionen der Parameter sind, so verfahren wir nach einer weiter unten dargestellten Methode weiter; wissen wir aber keine entsprechende Darstellung der Kugel und keine Parametertransformation, welche die Fläche Σ längentreu auf die Kugel in irgendeiner der bekannten Darstellungen abbildet, so versuchen wir, die Kugel in den Parametern U, V darzustellen. Hierzu können wir folgende Methode anwenden:

Die Fundamentalgrößen erster Ordnung für die gesuchte Darstellung der Kugel müssen dieselben sein wie die von Σ. Die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung lassen sich aus ihnen berechnen, weil für die Kugel bekanntlich

$$D = -\frac{1}{R} \cdot E \qquad D' = -\frac{1}{R} \cdot F \qquad D'' = -\frac{1}{R} G \text{ ist.}$$

[1]) Aus 28) und 23) folgt ohne weiteres: Vergrößert man die Ausgangsfläche im Maßstabe $1:\lambda$, so vergrößert sich die Transformierte im Maßstabe $1:\lambda^{1/3}$, bleibt also sich ähnlich.

Um also die Kugel in einer zu Σ längentreuen Darstellung zu bekommen, brauchen wir nur aus diesen Fundamentalgrößen die Koordinaten als Funktionen von U und V zu berechnen. Diese Aufgabe läßt sich bekanntlich auf die Integration einer Differentialgleichung vom Riccatischen Typus zurückführen.

Haben wir nun die Koordinaten der Kugel, x_0, y_0, z_0, als Funktionen von U und V, so sind die gesuchten geodätischen Parameter nach 10):

$$\text{A.} \quad u = \frac{x_0(U, V)}{z_0(U, V)} \qquad v = \frac{y_0(U, V)}{z_0(U, V)}$$

(oder entsprechende lineare Funktionen von u und v gemäß 14) und 15)). Lösen wir diese Gleichungen nach U und V auf, und setzen wir:

$$\text{B.} \quad U = P(u, v) \qquad V = Q(u, v)$$

in die Gleichungen von Σ ein, so ist damit Σ in den verlangten geodätischen Parametern dargestellt. Einfacher werden wir meistens die Fundamentalgrößen von Σ in bezug auf die neuen Parameter u, v mittels der ersten Gleichungen 5 a) und 5 b) berechnen; die weitere Durchführung der Transformation erfordert dann nur mehr Quadraturen.

Es kann aber vorkommen, daß die Auflösung der Gleichungen A. nach U und V Schwierigkeiten bietet oder auf allzu umfangreiche Ausdrücke führt. In diesem Falle verhelfen die zweiten Formeln 5 a) und 5 b) ohne weiteres zur Berechnng der Fundamentalgrößen und damit der Λ in bezug auf die Parameter u, v, aber ausgedrückt durch U und V. Bezeichnen wir sie mit einem Querstrich, so sind die Koordinaten der gesuchten Fläche offenbar gegeben durch:

$$d x_1 = \Lambda\, d u + \Lambda'\, d v \quad d y_1 = \Lambda'\, d u + \Lambda''\, d v \quad d z_1 = u\, d x_1 + v\, d y_1.$$

Ersetzen wir hier u, v, $d u$, $d v$ durch ihre aus A. zu ermittelnden Werte in U, V, $d U$, $d V$, so liefern uns ebenfalls bloße Quadraturen die Koordinaten von Σ_1, aber in den Parametern U und V. Also:

Satz III: Ist die Abwickelung von Σ auf die Kugel nicht bekannt, so erfordert ihre Ermittelung die Integration einer Differentialgleichung vom Riccatischen Typus. Ist sie bekannt, so erfordert die Anwendung der Hatzidakisschen Transformation nur noch algebraische Rechnungen, Differentiationen und Quadraturen.

Die Parameter u, v haben nach Hatzidakis auf Σ_1 eine einfache Bedeutung. Differentiiert man z_1 partiell nach x_1 und y_1, so erhält man:

$$u = \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)_{y_1 = \text{const}} \qquad v = \left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right)_{x_1 = \text{const}} \quad . \quad . \quad 38)$$

Hieraus ist u. a. ersichtlich, daß nur solche Punkte von Σ in reelle Punkte von Σ_1 übergehen können, für welche die Parameter u, v reell sind.

Aus 38) lassen sich auch ohne weiteres die Normalenrichtungen von Σ_1 berechnen, wenigstens bis aufs Vorzeichen. Um auch dieses festzusetzen, berechnen wir eine Normalenrichtung aus 27), wobei wir beachten, daß in $\Delta = \left|\frac{R^2}{w^3}\right| \quad w = \pm \left|\sqrt{1 + u^2 + v^2}\right|$ vom selben Vorzeichen wie R^2 genommen werden muß. Wir finden:

$$X_1 = + \frac{u}{|w|} \qquad Y_1 = \mp \frac{v}{|w|} \qquad Z_1 = \pm \frac{1}{|w|} \quad . \quad 39)$$

je nachdem $k = \pm 1$ ist.

In dieser Darstellung des sphärischen Bildes von Σ_1 liegt der Übergang zu den Betrachtungen Lies. Wir ziehen aus den Formeln 39) noch folgende Schlüsse:

Denken wir uns die Fläche Σ beliebig deformiert, so erhalten wir unendlich viele Flächen derselben konstanten Krümmung, bei denen allen die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Transformation erfüllt sind. Transformieren wir jede unter ihnen, so erhalten wir unendlich viele, durch die Parameter u, v aufeinander eindeutig abgebildete Flächen Σ_1, die nach 39) in entsprechenden Punkten gleiche Normalenrichtungen haben. Das gibt:

Satz IV: Die Transformierten aller aus Σ durch Biegung hervorgegangenen (auf Σ längentreu abgebildeten) Flächen sind aufeinander durch parallele Normalen abgebildet (haben identische sphärische Bilder).

Kapitel II.

Die durch die Hatzidakissche Transformation vermittelte Abbildung. Neue Formen dieser Transformation.

Berechnen wir entsprechende Flächenelemente von Σ und Σ_1, so ergibt sich unmittelbar aus 35):

$$dF : dF_1 = \Delta : \Delta_1 = R^{4/3},$$

also konstant; somit folgt:

Satz V: Die durch die Hatzidakissche Transformation vermittelte Abbildung ist flächentreu[1]).

Auf jeder Fläche sind bekanntlich die Schattenlinien dadurch definiert, daß in jedem ihrer Punkte die Flächennormale senkrecht zur Lichtrichtung steht. Beleuchten wir also Σ_1 durch parallele Lichtstrahlen mit den Richtungskosinussen C_1, C_2, C_3, so wird die Gleichung der entsprechenden Schattenlinie:

$$C_1 X_1 + C_2 Y_1 + C_3 Z_1 = 0,$$

oder nach 39):

$$C_1 u + C_2 v = C_3,$$

d. i. die Gleichung einer geodätischen Linie von Σ. Daraus folgt der noch von Hatzidakis angegebene

Satz VI: Die geodätischen Linien der Ausgangsfläche gehen durch die Hatzidakissche Transformation über in Schattenlinien der Transformierten.

Dieser Satz regt im Zusammenhang mit einigen der später folgenden Ergebnisse zu der Frage an, bei welchen Flächen Schat-

[1]) Dieser Satz folgt auch leicht aus Lies und Bianchis Betrachtungen.

tenlinien und geodätische Linien identisch sind. Diese Frage ist durch Naetsch und Salkowski[1]) bereits dahin beantwortet, daß die Kugel die einzige Fläche dieser Art ist.

Weiterhin folgt aus 36) sofort, daß die Gleichung der Asymptotenlinien für Σ wie für Σ_1 lautet:

$$D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0.$$

Dies führt unmittelbar zu dem von Lie gefundenen

Satz VII: Die Asymptotenlinien gehen bei der Hatzidakisschen Transformation wieder in Asymptotenlinien über.

Um den analogen Satz bezüglich der Krümmungslinien zu beweisen, beachten wir, daß deren Gleichung nach 12) lautet:

$$[(1+v^2)\,D' + u\,v\,D]\,du^2 + [(1+v^2)\,D'' - (1+u^2)\,D]\,du\,dv - [u\,v\,D'' + (1+u^2)\,D']\,dv^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 40)$$

Die Gleichung der Krümmungslinien auf Σ_1 ist:

$$(E_1 D_1' - F_1 D_1)\,du^2 + (E_1 D_1'' - G_1 D_1)\,du\,dv + (F_1 D_1'' - G_1 D_1')\,dv^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 40\,a)$$

Es folgt nun aber aus 34) und 36):

$$E_1 D_1' - F_1 D_1 = -R^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{D D'' - D'^2}{\Delta^{2/3}} \cdot [(1+v^2)\,D' + u\,v\,D]$$

$$E_1 D_1'' - G_1 D_1 = -R^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{D D'' - D'^2}{\Delta^{2/3}} \cdot [(1+v^2)\,D'' - (1+u^2)\,D]$$

$$F_1 D_1'' - G_1 D_1' = +R^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{D D'' - D'^2}{\Delta^{2/3}} \cdot [u\,v\,D'' + (1+u^2)\,D'].$$

Es geht also wegen

$$R^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{D D'' - D'^2}{\Delta^{2/3}} \neq 0$$

die Gleichung 40 a) unmittelbar in 40) über. Dies gibt den (von Lie stammenden)

Satz VIII: Die Krümmungslinien gehen bei der Hatzidakisschen Transformation wieder in Krümmungslinien über.

[1]) Über Kurvenpaare im Raum. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 19 (1910), S. 237 ff.

Nunmehr berechnen wir die Krümmung $\frac{1}{\varrho_1}$ irgendeines Normalschnittes von Σ_1. Fassen wir ihn auf als definiert durch ein Längenelement und die Flächennormale, so ist ihm ein Normalschnitt von Σ zugeordnet, und zwar derjenige, dessen Längenelement demselben Wertepaar (du, dv) entspricht wie das zu $\frac{1}{\varrho_1}$ gehörende Längenelement. Aus 34) folgt mit 23) und 8):

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{w^2}{R^{4/3}}[(1+u^2)D^2 + (1+v^2)D'^2 + 2uvDD'] \\ F_1 &= \frac{w^2}{R^{4/3}}[(1+u^2)DD' + (1+v^2)D'D'' + uv(DD'' + D'^2)] \\ G_1 &= \frac{w^2}{R^{4/3}}[(1+u^2)D'^2 + (1+v^2)D''^2 + 2uvD'D''] \end{aligned}\right\} 41)$$

Setzt man diese Werte in:

$$\varrho_1 = \frac{E_1 du^2 + 2F_1 du\,dv + G_1 dv^2}{D_1 du^2 + 2D_1' du\,dv + D_1'' dv^2}$$

ein, so folgt mit 36), 12) und 8) nach kurzer Umformung:

$$\varrho_1 = R^{4/3} \cdot h - \frac{\varrho}{R^{2/3}},$$

wo

$$h = \frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}}} + \frac{1}{\varrho^{\mathrm{II}}}$$

die mittlere Krümmung von Σ bedeutet. Insbesondere wird für $k = \pm 1$:

$$\varrho_1 \pm \varrho = h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 42)$$

d. h.: Für $k = +1$ ist die Summe und für $k = -1$ die Differenz entsprechender Normalkrümmungsradien (wobei in letzterem Falle der Radius der Transformierten als Minuend zu setzen ist) gleich der mittleren Krümmung der Ausgangsfläche.

Bezeichnen wir mit ϱ_1^{I} und ϱ_1^{II} die den Hauptkrümmungsradien ϱ^{I} und ϱ^{II} beziehungsweise entsprechenden Radien auf Σ_1, so müssen ϱ_1^{I} und ϱ_1^{II} offenbar Hauptkrümmungsradien von Σ_1 sein, da nach Satz VIII Hauptkrümmungsrichtungen wieder in Hauptkrümmungsrichtungen übergehen.

Aus 42) folgt wegen $\frac{1}{\varrho^{II}} = \pm \varrho^{I}$:

$$\pm \varrho + \varrho_1 = \pm (\varrho^{I} + \varrho^{II}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 42a)$$

und, wenn wir für ϱ einen Hauptkrümmungsradius einsetzen:

$$\varrho_1^{I} = \frac{1}{\varrho^{I}} \qquad \varrho_1^{II} = \frac{1}{\varrho^{II}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 43)$$

also:

Satz IX: Jeder Hauptkrümmungsradius geht in einen vom reziproken Wert über.

Bezeichnen wir ferner die mittlere Krümmung von Σ_1 mit h_1, so folgt aus 43):

$$h_1 - \frac{1}{\varrho_1^{I}} \pm \varrho_1^{I} = \varrho^{I} \pm \frac{1}{\varrho^{I}} = \pm h,$$

d. h.:

Satz X: Die mittlere Krümmung bleibt bei Flächen vom Krümmungsmaß $+1$ erhalten, bei Flächen vom Krümmungsmaß -1 ändert sie ihr Zeichen.

Zusatz: Kurven konstanter mittlerer Krümmung gehen wieder in Kurven konstanter mittlerer Krümmung über.

Es sei ferner ϱ' auf Σ der zu ϱ konjugierte Radius; dann ist bekanntlich:

$$\varrho + \varrho' = \varrho^{I} + \varrho^{II}.$$

Vergleichen wir diese Beziehung mit 42 a), so folgt unmittelbar:

$$\varrho_1 = \pm \varrho' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 44)$$

Ist nun ϱ_1' auf Σ_1 der ϱ' entsprechende Radius, so gilt ebenso:

$$\varrho_1' = \pm \varrho.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\varrho_1 + \varrho_1' = \pm (\varrho + \varrho') = \pm (\varrho^{I} + \varrho^{II})$$

und daher nach 43):

$$\varrho_1 + \varrho_1' = \varrho_1^{I} + \varrho_1^{II} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 44a)$$

also sind ϱ_1 und ϱ_1' konjugiert.

Aus 44) und 44 a) folgt:

Satz XI: Ist das Krümmungsmaß ± 1, so geht jede Normalkrümmung in die konjugierte und insbesondere jede Hauptkrümmung in die andere über, nur wechselt sie dabei für Flächen von der Krümmung -1 ihr Zeichen. Jedes Paar konjugierter Normalkrümmungen geht wieder in ein Paar konjugierter Normalkrümmungen über.

Die letztere Bemerkung hängt zusammen mit folgendem: Die Formeln 36) (S. 20) sind offenbar invariant gegen Parametertransformation. Denn führen wir irgendwelche neuen Parameter $\bar{u}, \bar{v}$ ein vermöge der ganz beliebigen Gleichungen $u = P(\bar{u}, \bar{v})$ $v = Q(\bar{u}, \bar{v})$, so transformieren sich die D_1 nach denselben Formeln 5a) wie die D und bleiben daher immer im gleichen Verhältnis zu ihnen. Bringen wir nun auf diese Weise Σ auf irgendein konjugiertes Parametersystem, so wird $D = 0$ und daher auch $D' = 0$; also ist dann Σ_1 auch auf ein konjugiertes System bezogen; daraus folgt der Satz:

Satz XII: Jedes konjugierte System geht wieder in ein konjugiertes System über; — die durch die Hatzidakissche Transformation vermittelte Abbildung ist konjunktiv[1]).

Die Formel 43) ermöglicht einen einfachen Übergang zu den Bianchischen Betrachtungen[2]). Wir denken uns die Fläche Σ auf ihre Krümmungslinien bezogen; dann ist auch die Fläche Σ_1 auf ihre Krümmungslinien bezogen. Nun gilt aber auf Σ:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{D\,du^2 + D''\,dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2}$$

und daher

$$\frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}}} = \frac{D}{E}\ (v = \text{const}) \qquad \frac{1}{\varrho^{\mathrm{II}}} = \frac{D''}{G}\ (u = \text{const}).$$

[1]) Nach einem Satze von P. Stäckel (Mathemat. Annalen, Bd. 44, S. 558) hätte dieses Ergebnis auch unmittelbar aus der Invarianz der Asymptotenlinien gefolgert werden können.

[2]) Bianchi-Lukat, § 264 (= Auflage von 1910, § 269).

oder:

$$D = \frac{E}{\varrho^{\mathrm{I}}} \qquad D'' = \frac{G}{\varrho^{\mathrm{II}}} \qquad D' = F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 45)$$

Ebenso ergibt sich für Σ_1:

$$D_1 = \frac{E_1}{\varrho_1{}^{\mathrm{I}}} \qquad D_1'' = \frac{G_1}{\varrho_1{}^{\mathrm{II}}} \qquad D_1' = F_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 46)$$

Nun nehmen bekanntlich die Fundamentalgleichungen 1) und 2) die Form an:

$$\left(\frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}}} - \frac{1}{\varrho^{\mathrm{II}}}\right) \frac{\partial \ln \sqrt{E}}{\partial v} = - \frac{\partial \frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}}}}{\partial v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 47)$$

$$\left(\frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}}} - \frac{1}{\varrho^{\mathrm{II}}}\right) \frac{\partial \ln \sqrt{G}}{\partial u} = + \frac{\partial \frac{1}{\varrho^{\mathrm{II}}}}{\partial u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 48)$$

Mit Bianchi setzen wir jetzt, wobei wir das Krümmungsmaß gleich $+1$ annehmen wollen:

$$\varrho^{\mathrm{I}} = \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}} \qquad \varrho^{\mathrm{II}} = \frac{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}} \quad . \quad . \quad . \quad 49)$$

wo ϑ eine später näher zu bestimmende Funktion von u und v und e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Aus 47) folgt:

$$\frac{\partial \ln \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial \ln \cosh \vartheta}{\partial v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 47\,a)$$

und ebenso aus 48):

$$\frac{\partial \ln \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{\partial \ln \sinh \vartheta}{\partial u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 48\,a)$$

Wir haben also:

$$E = \cosh^2 \vartheta \cdot f(u) \qquad G = \sinh^2 \vartheta \cdot \varphi(v).$$

Führen wir $\int \sqrt{f(u)}\, du$ anstatt u und $\int \sqrt{\varphi(v)}\, dv$ anstatt v als Parameter ein, so wird:

$$E = \cosh^2 \vartheta \qquad F = 0 \qquad G = \sinh^2 \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad 50)$$

Zugleich sieht man: Da ϑ durch 49) als Funktion eines Hauptkrümmungsradius bestimmt ist, so sind $f(u)$ und $\varphi(v)$ immer zu berechnen, wenn nur überhaupt die Fläche auf ihre Krümmungslinien bezogen ist, und die Auffindung des speziellen, den Gleichungen 50) genügenden, Parametersystems erfordert dann nur die beiden angegebenen Quadraturen.

Mit 45) folgt ohne weiteres:

$$D = \frac{E}{\varrho^{\mathrm{I}}} = \sinh\vartheta\cosh\vartheta = \frac{G}{\varrho^{\mathrm{II}}} = D'',$$

also wegen 36) und $k = +1$:

$$D = D_1 = D'' = D_1'' = \sinh\vartheta\cosh\vartheta;\ D' = D_1' = 0\ . \quad 51)$$

Setzen wir in 46) die Werte von ϱ_1^{I} und ϱ_1^{II} aus 43) ein, so folgt:

$$E_1 = \frac{D_1}{\varrho^{\mathrm{I}}} \qquad G_1 = \frac{D_1''}{\varrho^{\mathrm{II}}}$$

und somit:

$$E_1 = \sinh^2\vartheta = G \qquad G_1 = \cosh^2\vartheta = E \qquad F_1 = 0 = F \quad 52)$$

Um die Bedeutung der Funktion ϑ zu erkennen, braucht man nur die Asymptotenwinkel ω und ω_1 von Σ und Σ_1 zu berechnen; man findet ohne weiteres:

$$\text{für } \Sigma\text{:}\quad \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \sqrt{-\frac{\varrho^{\mathrm{II}}}{\varrho^{\mathrm{I}}}} = i\cdot\frac{e^{\vartheta}-e^{-\vartheta}}{e^{\vartheta}+e^{-\vartheta}} = \operatorname{tg}(i\vartheta),$$

$$\text{für } \Sigma_1\text{:}\quad \operatorname{tg}\frac{\omega_1}{2} = \sqrt{-\frac{\varrho_1^{\mathrm{II}}}{\varrho_1^{\mathrm{I}}}} = \sqrt{-\frac{\varrho^{\mathrm{I}}}{\varrho^{\mathrm{II}}}} = \cot(i\vartheta) = \cot\frac{\omega}{2}.$$

Also:

$$\omega_1 + \omega = \pi\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 53)$$

und $(i\vartheta)$ bedeutet den halben Asymptotenwinkel von Σ.

Dies führt zu dem — Bianchischen — Ergebnis:

Satz XIII: Hat eine Fläche vom Krümmungsmaß $+1$, bezogen auf ihre Krümmungslinien, die Fundamentalgrößen:

$$E = \cosh^2\vartheta \quad F = 0 \quad G = \sinh^2\vartheta \quad D = D'' = \sinh\vartheta\cosh\vartheta$$
$$D' = 0,$$

so hat ihre Hatzidakissche Transformierte die Fundamentalgrößen:

$$E_1 = \sinh^2\vartheta \quad F_1 = 0 \quad G_1 = \cosh^2\vartheta \quad D_1 = D_1'' = \sinh\vartheta\cosh\vartheta$$
$$D_1' = 0.$$

Hieraus lassen sich auch noch andere einfache Darstellungen der Transformation herleiten. Nach Pucci[1]) ist die Differential-

[1]) Dell'angolo caratteristico e delle linee caratteristiche di una superficie. Atti della Re. Acc. d. Lincei Rendic. 5, 1 (1889), Ser. 4, p. 501 ff.

gleichung der charakteristischen Linien, wenn Krümmungslinien Parameterkurven sind:

$$\sqrt{D}\,du \pm \sqrt{D''}\,dv = 0,$$

eine Gleichung, die offenbar invariant ist[1]); in unserem Falle gibt sie wegen $D = D''$: $u \pm v = \text{konst}$. Wir können also Σ und Σ_1 auf ihre charakteristischen Linien beziehen, indem wir setzen: $u + v = 2\bar{u}$ $u - v = 2\bar{v}$ oder:

$$\begin{aligned} P &= \bar{u} + \bar{v} & P_1 &= 1 & P_2 &= 1 \\ Q &= \bar{u} - \bar{v} & Q_1 &= 1 & Q_2 &= -1. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also nach 5) und 5a):

$$\bar{E} = \bar{G} = \cosh 2\vartheta = \bar{E}_1 = \bar{G}_1 \qquad \bar{F} = 1 = -\bar{F}_1$$
$$\bar{D} = \bar{D}'' = 2 \sinh\vartheta \cosh\vartheta = \bar{D}_1 = \bar{D}_1'' \qquad D' = 0 = D_1'.$$

Bezeichnen wir mit Ω und Ω_1 die charakteristischen Winkel, so folgt:

$$\cos\Omega = \frac{\bar{F}}{\sqrt{\bar{E}\bar{G}}} = \frac{1}{\cosh 2\vartheta}$$

und

$$\cos\Omega_1 = -\frac{1}{\cosh 2\vartheta}.$$

Wir fassen zusammen:

Satz XIIIa). Die charakteristischen Linien einer Fläche von der Krümmung $+1$ bleiben erhalten. Jeder charakteristische Winkel wird in seinen Supplementswinkel übergeführt. Hat die Ausgangsfläche in bezug auf charakteristische Linien die Fundamentalgrößen:

$$E = G = \cosh 2\vartheta \quad F = 1 \quad D = D'' = \sinh 2\vartheta \quad D' = 0,$$

so findet man die Fundamentalgrößen der Transformierten, indem man $F_1 = -1$ setzt und die anderen Fundamentalgrößen ungeändert läßt.

Die Gleichung der Asymptotenlinien wird wegen $D = D''$ und $D' = 0$:

$$du^2 + dv^2 = 0, \text{ also } u \pm iv = \text{const}^2).$$

[1]) Eisenhart, Transactions 6.

[2]) Siehe z. B. Darboux, Leçons, Bd. III.

Setzen wir also $u + iv = 2\bar{u}$ und $u - iv = 2\bar{v}$, also:

$$P = \bar{u} + \bar{v} \qquad P_1 = 1 \qquad P_2 = 1$$

$$Q \quad \frac{1}{i}(\bar{u} - \bar{v}) \qquad Q_1 = -i \qquad Q_2 = i,$$

so können wir damit Σ und Σ_1 auf ihre Asymptotenlinien beziehen und erhalten analog wie eben:

Satz XIIIb): Hat die Ausgangsfläche in bezug auf Asymptotenlinien die Fundamentalgrößen:

$$E = G = 1 \quad F = \cosh 2\vartheta \quad D = D'' = 0 \quad D' = \sinh 2\vartheta,$$

so hat ihre Transformierte die Fundamentalgrößen:

$$E_1 = G_1 = -1 \quad F_1 = \cosh 2\vartheta \quad D_1 = D_1'' = 0 \quad D_1' = \sinh 2\vartheta.$$

Eine analoge Untersuchung führen wir nun noch für die Flächen des konstanten Krümmungsmaßes -1 durch.

Hier setzen wir:

$$\varrho^{\mathrm{I}} = -\cot\vartheta \qquad \varrho^{\mathrm{II}} = +\operatorname{tg}\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 49\mathrm{a})$$

wo wir uns die nähere Bestimmung von ϑ für später vorbehalten.

Jetzt gehen die Gleichungen 47) und 48) über in:

$$\frac{\partial \ln \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial \ln \cos\vartheta}{\partial v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 47\mathrm{b})$$

$$\frac{\partial \ln \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{\partial \ln \sin\vartheta}{\partial u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 48\mathrm{b})$$

Analog wie oben können wir mittels Quadraturen solche Parameter einführen, daß:

$$E = \cos^2\vartheta \qquad G = \sin^2\vartheta \qquad F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 50\mathrm{a})$$

wird.

Mit 45) folgt dann:

$$D = \frac{E}{\varrho^{\mathrm{I}}} = -\sin\vartheta\cos\vartheta \qquad D'' = \frac{G}{\varrho^{\mathrm{II}}} = +\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

also nach 36) und wegen $k = -1$:

$$D = D_1'' = -\sin\vartheta\cos\vartheta \qquad D'' = D_1 = +\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$D' = 0 = D_1' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 51\mathrm{a})$$

Nun folgt, wie schon oben bemerkt, aus 43) und 46):

$$E_1 = \frac{D_1}{\varrho^{\mathrm{I}}} \text{ und } G_1 = \frac{D_1''}{\varrho^{\mathrm{II}}},$$

also nach 49 a) und 51 a):

$$E_1 = -\sin^2\vartheta = -G \quad G_1 = -\cos^2\vartheta = -E \quad F_1 = 0 \quad 52\,\mathrm{a})$$

Auch hier ergibt sich die Bedeutung von ϑ durch Berechnung der Asymptotenwinkel ω und ω_1. Wir finden:

für Σ: $\quad \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \sqrt{-\frac{\varrho^{\mathrm{II}}}{\varrho^{\mathrm{I}}}} = \operatorname{tg}\vartheta;$

für Σ_1: $\quad \operatorname{tg}\frac{\omega_1}{2} = \sqrt{-\frac{\varrho_1{}^{\mathrm{II}}}{\varrho_1{}^{\mathrm{I}}}} = \sqrt{-\frac{\varrho^{\mathrm{I}}}{\varrho^{\mathrm{II}}}} = \cot\vartheta,$

also: $\quad \omega + \omega_1 = \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 53\,\mathrm{a})$

und ϑ ist der halbe Asymptotenwinkel von Σ.

Satz XIV: Hat eine Fläche mit der konstanten Krümmung -1, bezogen auf ihre Krümmungslinien, die Fundamentalgrößen:

$$E = \cos^2\vartheta \quad F = 0 \quad G = \sin^2\vartheta \quad D = -\sin\vartheta\cos\vartheta$$
$$D' = 0 \quad D'' = +\sin\vartheta\cos\vartheta,$$

so hat ihre Transformierte die Fundamentalgrößen:

$$E_1 = -\sin^2\vartheta \quad F_1 = 0 \quad G_1 = -\cos^2\vartheta \quad D_1 = +\sin\vartheta\cos\vartheta$$
$$D_1' = 0 \quad D_1'' = -\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Die Gleichung der Asymptotenlinien wird wegen $D = -D''$ für beide Flächen:

$$d\,u^2 - d\,v^2 = 0, \text{ also } u \pm v = \text{const.}$$

Analog wie oben setzen wir:

$$u = P = \bar{u} + \bar{v} \quad P_1 = 1 \quad P_2 = 1$$
$$v = Q = \bar{u} - \bar{v} \quad Q_1 = 1 \quad Q_2 = -1.$$

Also gilt nach 5) und 5 a):

Satz XIVa): Hat die Ausgangsfläche, bezogen auf Asymptotenlinien, die Fundamentalgrößen:

$$E = G = 1 \quad F = \cos 2\vartheta \quad D = D'' = 0 \quad D' = -\sin 2\vartheta,$$

so hat ihre Transformierte die Fundamentalgrößen:

$$E_1 = G_1 = -1 \quad F_1 = \cos 2\vartheta \quad D_1 = D_1'' = 0$$
$$D_1' = +\sin 2\vartheta.$$

Weiterhin folgt aus 53) und 53a) für jedes Krümmungsmaß:

Satz XV: Jeder Asymptotenwinkel geht in seinen Supplementswinkel über.

Der Vollständigkeit halber ist noch zu erwähnen, daß die dritte Fundamentalgleichung für Σ wie Σ_1 die Funktion $\vartheta(u, v)$ an die Bedingung bindet:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a) im Falle } k = +1\text{:} & \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2} = -\sinh\vartheta\cosh\vartheta \\ \text{b) im Falle } k = -1\text{:} & \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2} = +\sin\vartheta\cos\vartheta \end{array}\right\} \quad 54)$$

Hätten wir die Rechnungen, die zu den Sätzen XIII und XIV geführt haben, unter der Voraussetzung:

$$\text{a)}\quad \varrho^{\mathrm{I}} = \frac{e^{\vartheta'} - e^{-\vartheta'}}{e^{\vartheta'} + e^{-\vartheta'}} \qquad \varrho^{\mathrm{II}} = \frac{e^{\vartheta'} + e^{-\vartheta'}}{e^{\vartheta'} - e^{-\vartheta'}} \quad \text{für } k = +1$$

$$\text{b)}\quad \varrho^{\mathrm{I}} = -\operatorname{tg}\vartheta' \qquad \varrho^{\mathrm{II}} = +\cot\vartheta' \quad \text{für } k = -1$$

durchgeführt, so hätten wir gefunden:

Im Falle a):

$$E = \sinh^2\vartheta' \quad F = 0 \quad G = \cosh^2\vartheta'$$
$$D = \sinh\vartheta'\cosh\vartheta' = D'' \qquad D' = 0$$
$$E_1 = \cosh^2\vartheta' \quad F_1 = 0 \quad G_1 = \sinh^2\vartheta'$$
$$D_1 = \sinh\vartheta'\cosh\vartheta' = D_1'' \quad D_1' = 0;$$

im Falle b):

$$E = -\sin^2\vartheta' \quad F = 0 \quad G = -\cos^2\vartheta'$$
$$D = +\sin\vartheta'\cos\vartheta' = -D'' \qquad D' = 0$$
$$E_1 = \cos^2\vartheta' \quad F_1 = 0 \quad G_1 = \sin^2\vartheta'$$
$$D_1 = -\sin\vartheta'\cos\vartheta' = -D_1'' \quad D_1' = 0.$$

Daraus folgt die Umkehrbarkeit nicht nur der Sätze XIII und XIV, sondern auch der aus ihnen durch bloße Parametertransformationen abgeleiteten Sätze.

Satz XVI: Die Sätze XIII bis XIVa) sind, soweit sie von Fundamentalgrößen handeln, umkehrbar. Die zweimalige Anwendung der Transformation führt zur Ausgangsfläche zurück (nach Lie »reziproke« oder »involutorische« Transformation).

Da die Transformation auf jede Fläche konstanter Krümmung angewendet werden kann, und da sie umkehrbar ist, so können wir jede Fläche konstanter Krümmung als Resultat einer Hatzidakisschen Transformation ansehen. Es folgt so:

Zusatz 1: Jede Fläche konstanter Krümmung ist mit der Hatzidakisschen Transformation erreichbar, aber nur von einer ganz bestimmten Ausgangsfläche aus.

Zusatz 2: Auf jeder Fläche von der konstanten Krümmung ± 1 gibt es ∞^3 solche Systeme von Schattenlinien, für welche $\Delta^2 = \frac{1}{w^3}$ wird, wobei

$$u = \frac{\partial z}{\partial x},\ v = \frac{\partial z}{\partial y},\ w^2 = 1 + u^2 + v^2$$

ist.

Außer den in den Sätzen XIII bis XIVa behandelten Transformationsarten wäre noch eine von Eisenhart[1]) aufgestellte zu erwähnen, welche eine Verallgemeinerung der Sätze XIII und XIII a darstellt. Dies legt die Frage nahe, ob es nicht eine für jede Parameterdarstellung gültige Formelgruppe gebe, welche in jedem Falle die Berechnung der neuen Fundamentalgrößen aus den alten gestatte. Diese Frage ist zu bejahen.

Aus 41), 36) und 12) folgt:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= R^{2/3} \cdot \frac{G D^2 + E D'^2 - 2 F D D'}{\Delta^2} & D_1 &= \frac{D}{R^{2/3}} \\ F_1 &= R^{2/3} \cdot \frac{G D D' + E D' D'' - F D D'' - F D'^2}{\Delta^2} & D_1' &= \frac{D'}{R^{2/3}} \\ G_1 &= R^{2/3} \cdot \frac{G D'^2 + E D''^2 - 2 F D' D''}{\Delta^2} & D_1'' &= \frac{D''}{R^{2/3}} \end{aligned}\right\} \quad 55)$$

[1]) l. c. (Transactions 6.)

Von diesen Gleichungen haben wir die rechtsstehenden bereits als invariant gegen Parametertransformation erkannt. Um auch die Invarianz der linksstehenden Formeln zu beweisen, beachten wir, daß:

die mittlere Krümmung: $h = \dfrac{E D'' - 2 F D' + G D}{\Delta^2}$ und die

Gaußsche Krümmung: $k = \dfrac{D D'' - D'^2}{\Delta^2}$ ist.

Dann nehmen die Gleichungen 55) die Form an:

$$E_1 = R^{2/3}(h D - k E) \qquad F_1 = R^{2/3}(h D' - k F)$$
$$G_1 = R^{2/3}(h D'' - k G) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 56)$$

Also sind die Koeffizienten des Längenelementquadrates von Σ_1 bis auf einen konstanten Faktor denen des Längenelementquadrates des sphärischen Bildes von Σ gleich. Dies gibt den — für positives Krümmungsmaß bereits bekannten —

Satz XVII: Das Längenelement von Σ_1 ist, abgesehen von einem — bei pseudosphärischen Flächen imaginären — Zahlenfaktor, gleich dem des sphärischen Bildes von Σ.

Aus dieser geometrischen Deutung erhellt ohne weiteres die Invarianz der Formeln 56) und daher auch 55) gegenüber Parametertransformation, wovon man sich auf Grund der Gleichungen 5) und 5a) auch leicht analytisch überzeugen könnte. Also gilt der

Satz XVIII: Für jede Parameterdarstellung der Ausgangsfläche folgen die Fundamentalgrößen der Transformierten unmittelbar aus den Gleichungen 55).

Man überzeugt sich leicht davon, daß XIII bis XIV a nur spezielle Fälle dieses Satzes sind. Aus ihm lassen sich also mannigfache Folgerungen ziehen; zum Beispiel auch folgende:

1. Sind auf Σ die Parameter isotherm-konjugiert, d. h. ist $D' = 0$ und $D = D''$, so ist nach 55) auch $D_1' = 0$ und $D_1 = D_1''$; also ein isotherm-konjugiertes System geht wieder in ein solches über. Es ist dann weiter, wie man ohne weiteres sieht:

$$E_1 = \frac{1}{R^{4/3}} \cdot G \qquad F_1 = -\frac{1}{R^{4/3}} \cdot F \qquad G_1 = \frac{1}{R^{4/3}} \cdot E.$$

Dies gibt den — für positives Krümmungsmaß von Eisenhart bewiesenen —

Satz XIX: Sind auf einer Fläche von der konstanten Krümmung ± 1 die Parameter isotherm-konjugiert, so sind die Fundamentalgrößen der Transformierten, ausgedrückt durch die der Ausgangsfläche:

$$D_1 = \pm D \quad D_1' = 0 \quad D_1'' = \pm D'' \quad E_1 = G \quad F_1 = -F$$
$$G_1 = E.$$

2. Ist dagegen $D = -D''$ und $D' = 0$, so ist auch $D_1 = -D_1''$ und $D_1' = 0$, und im Falle $k = \pm 1$:

$$D_1 = \pm D \quad D_1' = 0 \quad D_1'' = \pm D'' \quad E_1 = -G$$
$$F_1 = -F \quad G_1 = -E.$$

Eisenhart zeigt[1]), daß unter der Voraussetzung $D = -D''$ für pseudosphärische Flächen die Gleichungen erfüllt sein müssen:

$$2\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial E}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial v} \qquad 2\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial E}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial u}.$$

Man sieht, daß E_1, F_1, G_1 die Bedingungen erfüllen. Der Grund, warum Eisenhart zu dem scheinbar widersprechenden Ergebnis gelangt, daß für pseudosphärische Flächen eine der Hatzidakisschen analoge Transformation nicht existiere, liegt darin, daß — offenbar im Interesse der Realität der Transformierten — diese Gleichungen durch

$$E_1 = +G \quad F_1 = +F \quad G_1 = +E$$

befriedigt werden, in welchem Falle sich allerdings für Σ_1[2]) ein positives Krümmungsmaß ergibt. Wie sich aus unseren folgenden Sätzen (XXI und XXII) ergibt, trifft die erwähnte Eisenhartsche Bemerkung zu, wenn man es für die Transformation als wesentlich auffaßt, daß sie reelle Punkte wieder in reelle Punkte überführen soll.

[1]) Transactions 6, S. 483 f.
[2]) Aus der dritten Fundamentalgleichung.

3. Wir legen uns die Frage vor: Wann geht ein Orthogonalsystem wieder in ein Orthogonalsystem über? Wir beziehen Σ auf ein Orthogonalsystem; dann ist $F = 0$ und daher

$$F_1 = R^{2/3} \frac{D' (G D + E D'')}{\Delta^2}$$

Damit $F_1 = 0$ sei, muß entweder $D' = 0$ sein, was auf den Fall der Krümmungslinien führt, oder $G D = - E D''$ und somit $E_1 = - \frac{E}{R^{4/3}}$, $G_1 = - \frac{G}{R^{4/3}}$, wodurch jedes reelle Längenelement von Σ in ein imaginäres Element auf Σ_1 übergeführt würde. Also folgt:

Satz XX: Die Krümmungslinien sind das einzige reelle Orthogonalsystem, das wieder in ein reelles Orthogonalsystem übergeht.

Die in diesem Kapitel besprochenen Transformationsarten liefern nicht die Koordinaten, sondern nur die Fundamentalgrößen der gesuchten Fläche; zur vollständigen Durchführung der Hatzidakisschen Transformation bleibt also die Bestimmung der Koordinaten einer Fläche aus ihren Fundamentalgrößen und somit die Integration einer Differentialgleichung vom Riccatischen Typus nötig. Nichtsdestoweniger führen diese Transformationen mit Hilfe des Bonnetschen Satzes dann leicht auf die gesuchte Fläche, wenn diese eine bereits bekannte Fläche in einer bereits bekannten Parameterdarstellung ist, wie z. B. in dem von Eisenhart behandelten Falle der Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung. — Will man eine der Transformationen XIII bis XIVa anwenden, so sei darauf aufmerksam gemacht, daß sich nach Lie[1]) die Krümmungslinien wie die Asymptotenlinien einer Fläche konstanter Krümmung durch Quadratur bestimmen lassen. Gelingt es sodann, die Parameter der Krümmungslinien wirklich in die Flächengleichungen einzuführen, so erfordert die Auffindung der für die genannten Transformationsarten nötigen Parameter nach S. 29 nur mehr Quadratur. Eine derartige Transformation bietet den Vorteil,

[1]) l. c. (Arch. f. M. og. Natv. 4 S. 345 ff.).

daß den Parameterkurven auf beiden Flächen dieselbe geometrische Bedeutung zukommt (z. B. Krümmungslinien). Aber wenn sich ein solches Verfahren nicht ohne größere Schwierigkeiten durchführen läßt, verfährt man immer noch am einfachsten nach Satz XVIII, wobei es sich unter Umständen empfehlen kann, die Kurven konstanter mittlerer Krümmung als eine Schar von Parameterkurven zu wählen (Schraubenflächen).

Wir ziehen noch eine Folgerung aus Satz XIV: Denken wir uns auf der Fläche Σ vom Krümmungsmaß -1 die Parameter so gewählt, daß $ds^2 = \cos^2\vartheta\, du^2 + \sin^2\vartheta\, dv^2$ wird! Da ϑ der halbe Asymptotenwinkel ist, so sind $\cos^2\vartheta$ und $\sin^2\vartheta$ in jedem reellen Punkt positiv. Das Quadrat des Linienelementes einer Krümmungslinie ist also: $ds^{I2} = \cos^2\vartheta\, du^2$ bzw. $ds^{II2} = \sin^2\vartheta\, dv^2$. Auf Σ_1 dagegen sind die entsprechenden Linienelementquadrate der Krümmungslinien: $ds_1{}^{I2} = -\sin^2\vartheta\, du^2$ und $ds_1{}^{II2} = -\cos^2\vartheta\, dv^2$, also negativ, was auf reellen Flächen wegen der Realität der Krümmungslinien unmöglich ist. Also:

Satz XXI: Alle reellen Punkte einer pseudosphärischen Fläche gehen in imaginäre Punkte über.

Bemerkung: Wegen des reziproken Charakters der Transformation sind also alle reellen pseudosphärischen Flächenstücke als die Transformierten von imaginären Flächenteilen anzusehen. Wie uns Beispiele zeigen werden, können aber diese imaginären Flächenteile unter Umständen doch Fortsetzungen reeller Flächenstücke sein, so daß dann aus einer reellen Fläche wieder eine reelle Fläche, bloß in imaginärer Abbildung auf erstere, hervorgeht. (Näheres S. 62 f.)

Um für Flächen positiver Krümmung einen analogen Satz abzuleiten, stellen wir uns ein reelles Flächenstück Σ vor, das in reeller Weise längentreu auf die reelle Kugel abgebildet werden kann. Geben wir der Kugel, und damit dem Flächenstück Σ, die oben erwähnte geodätische Darstellung, so sind nach 10) u und v reell, und die Koordinaten x, y, z von Σ haben als reelle Funktionen auch reelle partielle Ableitungen nach u und v. Es sind also für alle reellen Punkte von Σ die sechs Fundamental-

größen und damit wegen der Realität von $\Delta^{1/3}$ auch die A reell. Da nun die Koordinaten von Σ_1 aus den A durch bloße Quadraturen nach den reellen Variablen u, v erhalten werden, so müssen auch die Punkte von Σ_1 reell sein.

Satz XXII: Alle reellen Punkte eines Flächenstückes, das in seiner ganzen Ausdehnung längentreu auf die reelle Kugel abgebildet werden kann, gehen wieder in reelle Punkte über.

Nun denken wir uns die Flächen Σ und Σ_1 wieder auf die Parameter der Krümmungslinien gebracht. Durch irgendeine Relation zwischen u und v sei auf ihnen ein Paar entsprechender Kurven definiert. Bezeichnen wir deren geodätische Torsionen in entsprechenden Punkten mit

$$\tau = -\frac{M}{ds^2} \text{ und } \tau_1 = -\frac{M_1}{ds_1^2},$$

so ist nach XIII und XIV:

a) für $k = +1$:

$$M = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \cosh^2\vartheta\, du & \sinh\vartheta\cosh\vartheta\, du \\ \sinh^2\vartheta\, dv & \sinh\vartheta\cosh\vartheta\, dv \end{vmatrix} = du\,dv = -M_1;$$

also

$$\tau : \tau_1 = \left(-\frac{M}{ds^2}\right) : \frac{M}{ds_1^2} = -\frac{ds_1^2}{ds^2} \text{ (eine reziproke Beziehung),}$$

b) für $k = -1$:

$$M = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \cos^2\vartheta\, du & -\sin\vartheta\cos\vartheta\, du \\ \sin^2\vartheta\, dv & +\sin\vartheta\cos\vartheta\, dv \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta_1}\begin{vmatrix} -\sin^2\vartheta\, du & +\sin\vartheta\cos\vartheta\, du \\ -\cos^2\vartheta\, dv & -\sin\vartheta\cos\vartheta\, dv \end{vmatrix} = M_1,$$

also $\tau : \tau_1 = ds_1^2 : ds^2$.

Satz XXIII: Das Verhältnis der geodätischen Torsionen entsprechender Kurven ist für $k = +1$ gleich dem negativ genommenen reziproken Verhältnis entsprechender Linienelementquadrate, für $k = -1$ gleich dem positiv genommenen reziproken Verhältnis entsprechender Linienelementquadrate.

Die geodätischen Krümmungen seien $\varkappa = \frac{N}{ds^3}$ und $\varkappa_1 = \frac{N_1}{ds_1^3}$; dann ist für $k = +1$:

$$\text{auf } \Sigma \quad N = \sinh\vartheta \cosh\vartheta\,(du\,d^2v - dv\,d^2u)$$
$$+ \cosh^2\vartheta\,du\left(-\frac{\partial\vartheta}{\partial v}du^2 + 2\frac{\partial\vartheta}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial\vartheta}{\partial u}dv^2\right)$$
$$- \sinh^2\vartheta\,dv\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial\vartheta}{\partial v}du\,dv - \frac{\partial\vartheta}{\partial v}dv^2\right)$$
$$ds^3 = (\cosh^2\vartheta\,du^2 + \sinh^2\vartheta\,dv^2)^{3/2}$$

$$\text{und auf } \Sigma_1 \quad N_1 = \sinh\vartheta\cosh\vartheta\,(du\,d^2v - dv\,d^2u)$$
$$+ \sinh^2\vartheta\,du\left(-\frac{\partial\vartheta}{\partial v}du^2 + 2\frac{\partial\vartheta}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial\vartheta}{\partial v}dv^2\right)$$
$$- \cosh^2\vartheta\,dv\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial\vartheta}{\partial v}du\,dv - \frac{\partial\vartheta}{\partial u}dv^2\right)$$
$$ds_1^3 = (\sinh^2\vartheta\,du^2 + \cosh^2\vartheta\,dv^2)^{3/2}.$$

Bezeichnen wir nun mit k^{I} und k_1^{I} die geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien $v = \text{const}$, so folgt:

$$\varkappa^{\mathrm{I}2} : \varkappa_1^{\mathrm{I}2} = \frac{\vartheta_v^2}{\cosh^2\vartheta} : \frac{\vartheta_v^2}{\sinh^2\vartheta} = \mathrm{tgh}^2\vartheta = \frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}}} : \frac{1}{\varrho^{\mathrm{II}}}.$$

Satz XXIV: Auf Flächen vom Krümmungsmaß $+1$ verhalten sich die Quadrate der geodätischen Krümmungen entsprechender Krümmungslinien wie die zugehörigen Hauptkrümmungen.

Kapitel III.

Anwendung auf die Rotationsflächen konstanter Krümmung.

Das einfachste Beispiel, das sich für die Hatzidakissche Transformation finden läßt, ist das der Kugel. Für sie ist die passende geodätische Darstellung bereits eingangs angegeben. Da die Fundamentalgrößen erster Ordnung die Form 12) haben und

$$D = -\frac{1}{R}\cdot E \qquad D' = -\frac{1}{R}F \qquad D'' = -\frac{1}{R}G$$

ist, so folgt:

$$A = -R^{1/3} \cdot \frac{1+v^2}{w^3} \qquad A' = R^{1/3} \cdot \frac{uv}{w^3} \qquad A'' = -R^{1/3} \frac{1+u^2}{w^3}.$$

Man sieht, daß $\varphi = -R^{1/3}\sqrt{1+u^2+v^2} + C_1 u + C_2 v + C_3$ die Gleichungen 25) befriedigt; dann aber wird die Transformierte dargestellt durch:

$$x_1 = -R^{1/3}\frac{u}{w} + C_1 \quad y_1 = -R^{1/3}\frac{v}{w} + C_2 \quad z_1 = R^{1/3} \cdot \frac{1}{w} - C_3.$$

Das ist wieder eine Kugel, und zwar dieselbe, von der wir ausgingen, wenn wir $R^2 = +1$ setzen; wir können sogar sagen in derselben Parameterdarstellung, wenn wir beachten, daß ein Zeichenwechsel von x und y ohne Einfluß auf E, F, G gewesen wäre.

Satz XXV: Die Kugel geht wieder in eine Kugel über.

Für den reellen Fall hätten wir das auch unmittelbar aus Gleichung 43) (S. 27) schließen können, da nach dieser Formel eine Fläche mit lauter Nabelpunkten wieder in eine solche übergehen muß.

Dies führt zu der Bemerkung, daß sich in besonderen Fällen die Transformierte einer gegebenen Fläche durch rein geometrische Schlüsse aus den Sätzen des vorigen Kapitels finden läßt. Die Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung sollen uns dafür ein Beispiel abgeben.

Wir gehen aus von dem Hilfssatz:

Hat eine Fläche eine Schar von Krümmungslinien, längs deren jeder beide Hauptkrümmungen konstant bleiben, so ist sie eine Rotationsfläche und hat die betreffende Schar von Krümmungslinien zu Breitenkreisen.

Geometrisch kann man diesen Satz etwa folgendermaßen beweisen:

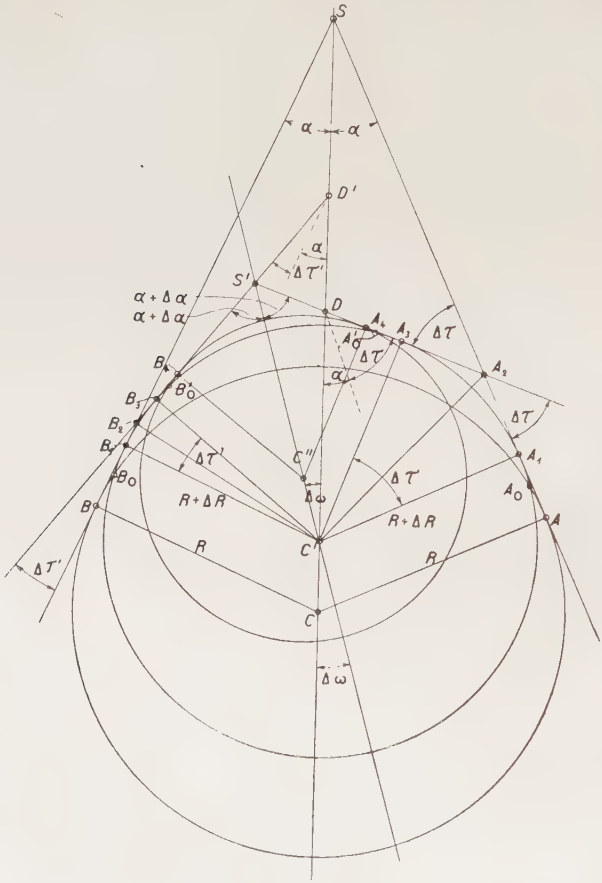
Es sei σ eine Krümmungslinie der zu betrachtenden Schar; dann hat der zugehörige Hauptkrümmungsradius längs der ganzen

Kurve σ den konstanten Wert R; also ist längs σ genommen $d R_0 = 0$. Nun hat bekanntlich jede Krümmungslinie eine Evolute, deren Längenelement $d s = d R_\sigma$ ist. In unserem Falle ist $d s = 0$, und wenn wir beachten, daß die reelle Krümmungslinie eine reelle Evolute verlangt und diese daher keine Minimalkurve sein kann, so muß sich die Evolute auf einen Punkt reduzieren. Dann liegt aber jede Krümmungslinie σ auf einer Kugel, deren Mittelpunkt das gemeinsame Krümmungszentrum der Flächenpunkte von σ ist; diese Kugel berührt unsere Fläche längs σ. Wir können also unsere Fläche als eine Kanalfläche auffassen, in welcher die Krümmungslinien σ die Berührungslinien mit der erzeugenden Kugel sind. Dann aber lehrt schon die räumliche Anschauung, daß längs σ nur dann beide Hauptkrümmungsradien konstant sein können, wenn die Leitlinie unserer Kanalfläche eine Gerade ist. Streng kann man das etwa folgendermaßen beweisen:

Wir wissen, daß sich die erzeugende Kugel von veränderlichem Radius mit ihrem Zentrum C auf einer Raumkurve bewegt. Drei unendlich benachbarte Kugelzentren bestimmen deren Schmiegungsebene (C, C', C''). Deren Schnitt mit unserer Fläche ist in der Figur dargestellt.

Zunächst ist klar, daß die gemeinsamen Tangenten der Kugeln C und C' einen Rotationskegel bilden, für dessen Öffnungswinkel die Formel gilt: $\sin \alpha = -\frac{d R}{d s}$, wo R der Kugelradius und $d s$ das Längenelement $C C'$ der Leitkurve ist. Die Mantellinien des Kegels sind zugleich Tangenten unserer Kanalfläche. Da die beiden Kugeln C und C' die Fläche je längs einer Krümmungslinie σ berühren, so kann, wenn C und C' unendlich benachbart angenommen werden, σ als Schnittkurve der beiden Kugeln C und C' aufgefaßt werden, und ist daher ein senkrecht auf $C C'$ stehender Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Geraden $C C'$ liegt. Der Kreis schneidet die Zeichenebene in A_0 und B_0 senkrecht, und die zu σ senkrechten Hauptkrümmungsrichtungen von A_0 und B_0 liegen in der Zeichenebene. Wir wollen diese Krümmungen berechnen.

Es seien A_1 und A_3 auf Kreis C', A auf Kreis C, A_4 auf Kreis C'' gelegen und $\Delta\tau = \sphericalangle A_3\, C'\, A_1$. A_0 sei der Schnitt der Kreise C und C', A_0' der Schnitt der Kreise C' und C''. Wir betrachten $\sphericalangle A_2\, DC$ als Außenwinkel sowohl des Dreiecks $D\, S'\, C'$ als auch des Dreiecks $A_2\, D\, S$ und finden so: $\Delta\tau = \Delta\alpha + \Delta\omega$. Ferner gilt:



$$A_0 A_1 = \Theta \cdot A\, A_1 = \Theta\, \Delta s \cdot \cos\alpha \quad (\Theta \text{ eine gewisse Zahl} < 1)$$

$$A_1 A_2 = (R + \Delta R) \cdot \operatorname{tg} \frac{\Delta\tau}{2}$$

$$A_2 A_3 = (R + \Delta R) \cdot \operatorname{tg} \frac{\Delta\tau}{2}$$

$$A_3 A_0' = \Theta' \cdot A_3 A_4 = \Theta'\, \Delta' s \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha) \quad (0 < \Theta' < 1).$$

Also das Linienelement der Einhüllenden:

$$(\Delta s_A)^2 = (A_0 A_0')^2 = \left[\Theta \cdot \Delta s \cdot \cos\alpha + (R + \Delta R)\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\tau}{2}\right]^2$$
$$+ \left[(R + \Delta R)\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\tau}{2} + \Theta' \cdot \Delta' s \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha)\right]^2$$
$$+ 2 \cdot \cos\Delta\tau \left[\Theta \cdot \Delta s \cdot \cos\alpha + (R + \Delta R)\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\tau}{2}\right]$$
$$\cdot \left[(R + \Delta R)\,\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\tau}{2} + \Theta' \cdot \Delta' s \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha)\right].$$

Wenn wir nun zur Grenze übergehen, so wird: $\lim \Theta = \frac{1}{2} = \lim \Theta'$; $\lim(\cos\Delta\tau) = 1$; $\lim(\cos\alpha \cdot \cos\Delta\alpha) = \cos\alpha$; $\lim(\sin\alpha \cdot \sin\Delta\alpha) = 0$; $\lim\left(\mathrm{tg}\,\frac{\Delta\tau}{2}\right) = \frac{d\tau}{2}$; $\lim \Delta s = ds$; $\lim \Delta R = dR$, und $\Delta' s$ wird unendlich klein von der zweiten Ordnung. Wir erhalten so:

$$ds_A = \frac{1}{2}\,ds \cdot \cos\alpha + R\,d\tau,$$

und daher der Krümmungsradius der Einhüllenden bei A:

$$\varrho_A = \frac{ds_A}{d\tau}\ ^{1)} = R + \frac{\cos\alpha}{2} \cdot \frac{ds}{d(\alpha + \omega)}.$$

Analog gilt auf der Seite von B:

$$\Delta\tau' = \Delta\alpha - \Delta\omega$$

und daher:

$$\varrho_B = R + \frac{\cos\alpha}{2} \cdot \frac{ds}{d(\alpha - \omega)}.$$

Da nun längs des ganzen Kreises σ beide Hauptkrümmungen der Fläche konstant sind, muß $\varrho_B = \varrho_A$ sein. Das ist nur möglich für $d\omega = 0$; also ist die Leitkurve unserer Kanalfläche eine Gerade und die Fläche eine Rotationsfläche.

[1]) $d\tau$ kann als Kontingenzwinkel der Einhüllenden angesehen werden, weil nach einem bekannten Satz $A A_2$ und $A_2 A_4$ als Tangenten der Einhüllenden in A_0 und A_0' angesehen werden dürfen.

Analytisch folgt der Satz aus den Fundamentalgleichungen: Wir denken uns die Fläche auf ihre Krümmungslinien bezogen. Längs der Krümmungslinien $u = \text{const}$ seien beide Hauptkrümmungen $\frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}}}$ und $\frac{1}{\varrho^{\mathrm{II}}}$ konstant. Es ist dann $\frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}}}$ wie $\frac{1}{\varrho^{\mathrm{II}}}$ von v unabhängig, und wir können setzen:

$$k^{\mathrm{I}}(u) = \frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}}} = \frac{D}{E} \qquad k^{\mathrm{II}}(u) = \frac{1}{\varrho^{\mathrm{II}}} = \frac{D''}{G} \qquad F = D'' = 0.$$

Die Fundamentalgleichungen nehmen bekanntlich für Krümmungslinien die Form an:

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{E} + \frac{D''}{G}\right)\frac{\partial E}{\partial v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1\,\mathrm{a})$$

$$\frac{\partial D''}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{E} + \frac{D''}{G}\right)\frac{\partial G}{\partial u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2\,\mathrm{a})$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) = -k\cdot\sqrt{EG} = -\frac{DD''}{\sqrt{EG}} \quad 3\,\mathrm{a})$$

Wir setzen nun $D = E\cdot k^{\mathrm{I}}(u)$ in die linke Seite von 1 a) ein und erhalten:

$$k^{\mathrm{I}}(u)\cdot\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{1}{2}\,\frac{DG + D''E}{EG}\cdot\frac{\partial E}{\partial v},$$

wo

$$\frac{DG + D''E}{EG} = k^{\mathrm{I}}(u) + k^{\mathrm{II}}(u)$$

nur von u allein abhängt. Ist nun $\frac{\partial E}{\partial v} \neq 0$, so können wir mit $\frac{\partial E}{\partial v}$ dividieren, und es folgt: $E : G = D : D''$, also der triviale Fall der Kugel.

Schließen wir diesen Fall aus, so bleibt nur $\frac{\partial E}{\partial v} = 0$, also E von u allein abhängig. Dann läßt sich bekanntlich das Längenelement auf die Form bringen: $ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2$.

Nunmehr setzen wir $D'' = k^{II}(u) \cdot G(u, v)$ in 2 a) ein und erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial u} \ln G(u, v) = 2 \cdot \frac{\frac{d\, k^{II}(u)}{\partial u}}{k^{I}(u) - k^{II}(u)} = \Phi(u)$$

(von v unabhängig).

$G(u, v)$ hat also die Form $\varphi(u)^2 \cdot F(v)$, und indem wir $\int F(v)\, dv$ anstatt v einführen, wird: $E = 1$, $F = 0$, $G = \varphi(u)^2$, $D = k^{I}(u)$, $D' = 0$, $D'' = k^{II}(u) \cdot \varphi^2$.

Nun folgt aus 3 a):

$$D = -\frac{\varphi(u)\, \varphi''(u)}{D''};$$

dann aber wird aus 2 a):

$$\frac{d(D''^2)}{du} = 2\, D''^2 \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} - 2\, \varphi(u)^2\, \varphi'(u)\, \varphi''(u),$$

eine lineare Differentialgleichung für D''^2. Ihr allgemeines Integral ist, wenn c eine Konstante bedeutet:

$$D''^2 = \varphi(u)^2 \cdot \left(\frac{1}{c^2} - \varphi'(u)^2\right);$$

daher ist:

$$D = -\frac{\varphi''(u)}{\sqrt{\frac{1}{c^2} - \varphi'(u)^2}} \qquad D' = 0 \qquad D'' = \varphi(u) \sqrt{\frac{1}{c^2} - \varphi'(u)^2}\,.$$

Die Fundamentalgrößen der betrachteten Fläche stimmen also überein mit denen der Rotationsfläche:

$$x = c \cdot \varphi(u) \cos\frac{v}{c} \qquad y = c \cdot \varphi(u) \sin\frac{v}{c} \qquad z = \int \sqrt{1 - c^2\, \varphi'(u)^2}\, du$$

(wo du das Bogenelement der Meridiankurve bedeutet). Unsere Fläche ist also nach dem Bonnetschen Satze identisch mit dieser, womit der Hilfssatz abermals bewiesen ist.

Nun sei Σ eine Rotationsfläche konstanter Krümmung. Dann sind bekanntlich längs eines jeden Breitenkreises beide Hauptkrümmungen konstant. Die Breitenkreise von Σ

gehen nun in eine Schar Krümmungslinien von Σ_1 über, und nach 43) (S. 27) sind längs jeder dieser Krümmungslinien beide Hauptkrümmungen konstant. Also:

Satz XXVI: Eine Rotationsfläche konstanter Krümmung geht wieder in eine Rotationsfläche über, und zwar werden die Parallelkreise wieder Parallelkreise und die Meridiane wieder Meridiane, und die Hauptkrümmungen entsprechender Elemente derselben sind reziprok (wenn $k = \pm 1$ ist).

Dieser Satz gilt offenbar für positive wie negative Krümmung. Wir wollen jetzt für den rein reellen Fall positiven Krümmungsmaßes in die nähere Untersuchung eintreten[1]). Da die Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung in reeller Weise auf die Kugel abgewickelt werden können, so sind von ihnen von vornherein reelle Transformierten zu erwarten. Das Krümmungsmaß nehmen wir gleich 1 an.

Die Erzeugende der Spindelfläche ist bekanntlich gegeben durch:

$$x = a \cdot \cos s \qquad z = \int_0^s \sqrt{1 - a^2 \sin^2 s}\, ds,$$

wo s die vom Schnittpunkt mit der x-Achse aus gemessene Bogenlänge und a eine Konstante zwischen 0 und 1 bedeutet. Aus diesen Gleichungen folgt für die Krümmung der Meridiankurve: $\frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}}} = \frac{a \cdot \cos s}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 s}} = \varrho^{\mathrm{II}}$ (= Normalenlänge bis zur x-Achse). $\frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}}} < \infty$, weil der Zähler nicht unendlich werden kann und der Nenner nicht Null. Dagegen ist $\frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}}} = 0$ für $s = \frac{\pi}{2}$, d. h. in der Spitze der Spindelfläche. Wir finden also für die Punkte in der Umgebung der Spitze auf keiner Spindelfläche Punkte,

[1]) Die (reelle) pseudosphärische Rotationsfläche vom hyperbolischen Typ, die in eine Fläche vom selben Typ übergeht, soll im nächsten Kapitel besprochen werden. Sie kann nicht in den rein reellen Fall miteinbezogen werden, da die reellen Punkte der Ausgangsfläche gewissen imaginären Punkten der Transformierten entsprechen und umgekehrt.

in die sie übergehen könnten; es ist daher unmöglich, daß eine Spindelfläche wieder in eine Spindelfläche übergeht.

Ebensowenig kann sie in eine Kugel übergehen, bei welcher alle Krümmungsradien gleich 1 sind. Es bleibt also, da sich eine reelle Fläche ergeben muß, nur eine Fläche vom Wulsttypus übrig. Deren Erzeugende hat dieselbe analytische Darstellung wie die der Spindelfläche, bloß mit der Konstanten $a_1 > 1$ an Stelle von a. In der Tat finden wir dann

$$\frac{1}{\varrho_1^{\mathrm{I}}} = \frac{a_1 \cos s_1}{\sqrt{1 - a_1^2 \sin^2 s_1}} = \infty \text{ für } \sin^2 s_1 = \frac{1}{a_1^2},$$

also im Rückkehrpunkt der Meridiankurve (hier ist natürlich noch $s_1 < \frac{\pi}{2}$).

Da die Spindelfläche periodisch ist, brauchen wir nur die Periode $-\frac{\pi}{2} < s < \frac{\pi}{2}$ zu betrachten. Innerhalb dieses Periodenstreifens hat die Fläche ihren größten Breitenkreis für $s = 0$; sein Radius ist gleich der Normalenlänge $\varrho^{\mathrm{II}} = \frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}}} = a < 1$. An dieser Stelle hat auch die Meridiankurve ein Maximum der Krümmung; denn

$$\frac{d\,\frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}}}}{ds} = \frac{a\,(a^2 - 1)\sin s}{(1 - a^2 \sin^2 s)^{3/2}} = 0 \text{ für } s = 0$$

und

$$\frac{d^2\,\frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}}}}{ds^2} = a\,(a^2 - 1),$$

also negativ für $s = 0$.

Betrachten wir die Transformierte, die Wulstfläche, so muß wegen $\varrho_1^{\mathrm{I}} = \frac{1}{\varrho^{\mathrm{I}}}$ diesem Maximum ein Minimum entsprechen. Wir finden dieses an der Stelle $s_1 = 0$, wenn wir $a_1 > 1$ an die Stelle von a in die eben durchgeführte Untersuchung einsetzen, also auf dem größten Breitenkreise der Fläche. Der Radius desselben ist $\varrho_1^{\mathrm{II}} = \frac{1}{\varrho_1^{\mathrm{I}}} = a_1$ und muß wegen der Reziprozität entsprechen-

der Hauptkrümmungen gleich $\frac{1}{a}$ sein. Die Konstante der gesuchten Wulstfläche ist daher $a_1 = \frac{1}{a}$[1]). $a = 1 = a_1$ gibt die Kugel.

Satz XXVII: Jede auf obige Weise mit der Konstanten a dargestellte Rotationsfläche geht in eine solche mit der Konstanten $\frac{1}{a}$ über.

Wollen wir zu einem gegebenen Breitenkreis $s = \text{const}$ den entsprechenden $s_1 = \text{const}$ finden, so gibt die Gleichung $\frac{1}{\varrho_1} = \varrho_1^{\text{I}}$ ohne weiteres:

$$\frac{a \cdot \cos s}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 s}} = \frac{\sqrt{1 - a_1^2 \sin^2 s_1}}{a_1 \cos s_1},$$

eine Gleichung, die sich wegen $a_1 = \frac{1}{a}$ reduziert auf: $\sin s_1 = a \sin s$.

Wollen wir nunmehr zu einem gegebenen Meridian $\omega = \text{const}$ (wo ω den Winkel der Meridianebene mit der XZ-Ebene bedeutet) den entsprechenden suchen, so brauchen wir nur zu berücksichtigen, daß die Abbildung flächentreu sein muß. Der Abstand eines Punktes der Rotationsfläche von der Achse ist gegeben durch:

$$r = a \cdot \cos s;$$

ferner das Flächenelement durch $r \cdot d\omega \cdot ds$. Also muß:

$$a \cdot \cos s \, ds \, d\omega = a_1 \cos s_1 \, ds_1 \, d\omega_1$$

sein, was sich schreiben läßt:

$$d(a \cdot \sin s) \cdot d\omega = a_1 \cdot d \sin s_1 \cdot d\omega_1,$$

und wegen $\sin s_1 = a \cdot \sin s$ und $a_1 = \frac{1}{a}$:

$$d\omega_1 = a \, d\omega.$$

Setzen wir fest, daß dem Meridian $\omega = 0$ der Meridian $\omega_1 = 0$ entsprechen soll, so folgt: $\omega_1 = a \cdot \omega$, womit die gegenseitige Abbildung unserer Rotationsflächen vollständig bestimmt ist.

[1]) In Übereinstimmung mit Eisenhart (Transactions 6).

Kapitel IV.

Anwendung auf die Schraubenflächen konstanter Krümmung $\frac{1}{R^2}$.

Die Schraubenflächen konstanter Krümmung, von denen die eben betrachteten Rotationsflächen nur ein spezieller Fall sind, wurden bereits in verschiedenen Darstellungen[1]) hergeleitet. Unter diesen dürfte sich wohl die von U. Dini am besten zur Anwendung der Hatzidakisschen Transformation eignen, da sie unmittelbar von der Abwicklung dieser Schraubenflächen auf die Kugel ausgeht.

Bekanntlich sind die Schraubenflächen, bezogen auf Meridiane und Schraubenlinien, gegeben durch:

$$x = r \cdot \cos \omega \qquad y = r \cdot \sin \omega \qquad z = m\,\omega + \varphi\,(r) \quad . \quad . \quad 57)$$

wo m eine Konstante bedeutet und die Ganghöhe gleich $2\,\pi\,m$ ist; also

$$\Delta\,(r, \omega)^2 = r^2 + m^2 + r^2\,\varphi'\,(r)^2, \text{ abgekürzt} = \Delta\,(r)^2 \quad . \quad 58)$$

Führt man neue Parameter U, V ein durch die Gleichungen:

$$\omega = -\,m \int \frac{\varphi'\,(r)}{r^2 + m^2}\,d\,r + c \cdot V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 59)$$

(wo c eine Konstante bedeutet) und

$$\sqrt{1 + \frac{r^2\,\varphi'\,(r)^2}{r^2 + m^2}} \cdot d\,r = dU \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 60)$$

(wodurch r als Funktion von U allein definiert ist), so nehmen bekanntlich die Fundamentalgrößen erster Ordnung die Form an:

$$E\,(U,V) = 1 \quad F\,(U,V) = 0 \quad G\,(U,V) = c^2\,(r^2 + m^2) = \Delta\,(U,V)^2 \quad 61)$$

Dini[2]) bestimmt nun die Schraubenflächen konstanter Krümmung daraus, daß ihr Längenelement mit dem der (reellen oder

---

[1]) Minding, Crelle Journ. f. Mat. 19 (1839). — Pirondini: Studio delle superficie elicoidali. Ann. di Mat. p. e. a. Ser. II, to. 16 (1888/89).

[2]) U. Dini: Sopra alcuni punti della theoria delle superficie applicabili. Ann. d. Mat. p. e. a. to. 7 (1865).

imaginären) Kugel übereinstimmen muß. Diese ist gegeben durch:

$$x' = R \cdot \cos \frac{U}{R} \cdot \cos \frac{V}{R} \qquad y' = R \cdot \cos \frac{U}{R} \cdot \sin \frac{V}{R}$$

$$z' = R \cdot \sin \frac{U}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 62)$$

Setzen wir abkürzend:

$$\frac{U}{R} = U' \text{ und } \frac{V}{R} = V',$$

so sind ihre Fundamentalgrößen erster Ordnung:

$$E(U,V) = 1 \quad F(U,V) = 0 \quad G(U,V) = \cos^2 U' = \Delta(U,V)^2 \quad 63)$$

Ihr Längenelement stimmt also dann mit dem der Schraubenflächen überein, wenn

$$c^2 (r^2 + m^2) = \cos^2 U', \text{ also } U' = \arccos (c \cdot \sqrt{r^2 + m^2}) \quad 64)$$

gesetzt werden kann. Dann folgt aber durch Differentiation nach U:

$$-\frac{1}{R} \sin U' \cos U' = c^2 r \cdot \frac{dr}{dU}.$$

Setzt man hier für $\sin U'$, $\cos U'$ und $\frac{dr}{dU}$ die Werte ein, die sich aus 64) und 60) ergeben, so zeigt eine kurze Zwischenrechnung, daß

$$\varphi'(r) = \sqrt{\frac{R^2 c^2 r^2 - (r^2 + m^2) + c^2 (r^2 + m^2)^2}{r^2 [1 - c^2 (r^2 + m^2)]}}$$

$$= \frac{\sqrt{c^2 r^4 + r^2 (2 c^2 m^2 + R^2 c^2 - 1) + (c^2 m^4 - m^2)}}{r \sqrt{1 - c^2 m^2 - c^2 r^2}} = \frac{\sqrt{Z}}{r \cdot \sqrt{N}} \quad 65)$$

sein muß.

Setzen wir auf der Kugel $u = \frac{z'}{y'}$ und $v = \frac{x'}{y'}$, so sind nach dem auf S. 12 Gesagten die Parameter u, v für die Hatzidakissche Transformation brauchbar. Da nun unsere Schraubenflächen durch U und V längentreu auf die Kugel abgebildet sind, so haben wir offenbar auf ihnen ein ebenfalls brauchbares Parametersystem, wenn wir nach 62) setzen:

also:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\sin U'}{\cos U' \sin V'} & v &= \cot V' \\ U &= R \cdot \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1 + v^2}} & V &= R \cdot \operatorname{arccot} v \end{aligned}\right\} \quad . \quad 66)$$

Die Fundamentalgrößen erster Ordnung für die betrachteten Schraubenflächen sind damit auf die Form 12) gebracht.

Nunmehr gehen wir zu den Fundamentalgrößen zweiter Ordnung über. Aus 57) folgt bekanntlich:

$$D(r,\omega) = \frac{r\cdot\varphi''(r)}{\Delta(r)} \quad D'(r,\omega) = -\frac{m}{\Delta(r)} \quad D''(r,\omega) = \frac{r^2\varphi'(r)}{\Delta(r)} \quad 67)$$

Ferner ergibt sich aus 59) und 60)

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial r}{\partial U}\frac{\sqrt{r^2+m^2}}{\Delta(r)} & P_2 &= \frac{\partial r}{\partial V} = 0 \\ Q_1 &= \frac{\partial \omega}{\partial U} = -\frac{m\,\varphi'(r)}{\sqrt{r^2+m^2}\cdot\Delta(r)} & Q_2 &= \frac{\partial \omega}{\partial V} = c \end{aligned}\right\} . \quad 68)$$

wo wir r als eine durch 64) bestimmte Funktion von U auffassen und unter $\varphi'(r)$ (in Δ) den durch 65) gegebenen Wert verstehen. Wir erhalten mittels der Transformationsformeln 5a) aus 67) und 68).

$$D'(U,V) = -\frac{m\,c}{\sqrt{r^2+m^2}} \qquad D''(U,V) = \frac{c^2 r^2\varphi'(r)}{\Delta(r)}.$$

Ersetzen wir nun $\varphi'(r)$ durch seinen Wert nach 65), beachten wir, daß dabei

$$\Delta(r) = R\cdot\sqrt{\frac{c^2 r^2}{1-c^2(r^2+m^2)}}$$

wird, und setzen wir nach 64)

$$r^2+m^2 = \frac{1}{c^2}\cdot\cos^2 U' \text{ und } c^2 r^2 = \cos^2 U' - c^2 m^2$$

ein, so folgt:

$$D(U,V) = \frac{R^2 c^4 m^2 + \cos^4 U'}{R\cdot\cos^2 U'\sqrt{(R^2c^2-1)\cos^2 U' - R^2 c^4 m^2 + \cos^4 U'}}$$

$$= \frac{S}{R\cdot\cos^2 U'\cdot W}\ ^{1})$$

$$D'(U,V) = -\frac{c^2 m}{\cos U'} \qquad D'' = \frac{1}{R}W,$$

$$\left.\begin{aligned} \text{wo} \quad & S = R^2 c^4 m^2 + \cos^4 U' \\ \text{und} \quad & W = \sqrt{(R^2c^2-1)\cos^2 U' - R^2 c^4 m^2 + \cos^4 U'} \end{aligned}\right\} . \quad 69)$$

gesetzt ist.

---

[1]) Berechnet aus D' und D'' vermittels $\frac{1}{R^2} = \frac{D\,D'' - D'^2}{\Delta^2}$.

Diese Fundamentalgrößen transformieren wir nun auf die Parameter u, v. Da sich jedoch später U' und V' als zweckmäßige Parameter der Transformierten erweisen werden, so unterlassen wir es, sie durch ihre Werte in u, v zu ersetzen und führen sie vielmehr an Stelle der durch 66) definierten Funktionen von u und v durchgehends ein. Aus 66) folgt:

$$\bar{P}_1 = \frac{\partial U}{\partial u} = R \cdot \cos^2 U' \cdot \sin V'$$

$$\bar{Q}_1 = \frac{\partial V}{\partial u} = 0$$

$$\bar{P}_2 = \frac{\partial U}{\partial v} = -R \cdot \sin U' \cos U' \sin V' \cos V'$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{\partial V}{\partial v} = -R \cdot \sin^2 V'.$$

Also ergibt sich aus 5 a):

$$D(u,v) = R \cdot \cos^2 U' \sin^2 V' \cdot \frac{S}{W}$$

$$D'(u,v) = \frac{R}{W} \cdot (R c^2 m \cdot \cos U' \sin^3 V' \cdot W - \sin U' \cos U' \sin^2 V' \cos V' \cdot S)$$

$$D''(u,v) = \frac{R}{W} \cdot (\sin^2 U' \sin^2 V' \cos^2 V \cdot S - 2 R c^2 m \cdot \sin U' \sin^3 V' \cos V' \cdot W + \sin^4 V' \cdot W^2).$$

Nun ist $\Delta (u,v)^{1/3} = R^{2/3} \cdot \cos U' \sin V'$[1]). Dividieren wir hiermit die eben erhaltenen Werte von D, D', D'', so ergibt sich:

$$A = \frac{R^{1/3}}{W} \cdot \cos U' \cdot \sin V' \cdot S$$

$$A' = \frac{R^{1/3}}{W} \cdot (R c^2 m \cdot \sin^2 V' \cdot W - \sin U' \sin V' \cos V' \cdot S)$$

$$A'' = \frac{R^{1/3}}{W \cdot \cos U'} \cdot (\sin^2 U' \sin V' \cos^2 V' \cdot S - 2 R c^2 m \cdot \sin U' \sin^2 V' \cos V' \cdot W + \sin^3 V' \cdot W^2).$$

[1]) Weil nach 66) $w = \sqrt{1 + u^2 + v^2} = \cos U' \sin V'$ ist.

Nun müssen, wie S. 16 gezeigt,

$$dx_1 = A\,du + A'\,dv \qquad dy_1 = A'\,du + A''\,dv$$
$$dz_1 = u\,dx_1 + v\,dy_1$$

vollständige Differentiale der Koordinaten einer neuen Fläche konstanter Krümmung sein. Um sie auf die unabhängigen Veränderlichen U', V' zu bringen, brauchen wir nur mehr nach 66) zu setzen:

$$du = \frac{dU'}{\cos^2 U' \sin V'} - \frac{\operatorname{tg} U' \cos V'\,dV'}{\sin^2 V'} \qquad dv = -\frac{dV'}{\sin^2 V'};$$

es heben sich dann verschiedene Glieder fort, sodaß folgt:

$$dx_1 = R^{1/3}\left(\frac{S}{W \cdot \cos U'} \cdot dU' - R\,c^2\,m \cdot dV'\right)$$

$$dy_1 = R^{1/3}\left(\frac{R\,c^2\,m \sin V'}{\cos U'}\,dU' - \frac{\sin U' \cos V' \cdot S}{\cos^2 U' \cdot W} \cdot dU' + R\,c^2\,m\,\frac{\sin U' \cos V'}{\cos U'}\,dV' - \frac{\sin V' \cdot W}{\cos U'}\,dV'\right)$$

$$dz_1 = R^{1/3}\left(\frac{\sin U' \sin V' \cdot S}{\cos^2 U' \cdot W} \cdot dU' + \frac{R\,c^2\,m \cos V'}{\cos^2 U'}\,dU' - \frac{R\,c^2\,m \sin U' \sin V'}{\cos U'}\,dV' - \frac{\cos V' \cdot W}{\cos U'} \cdot dV'\right).$$

Durch Integration endlich ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß nach 69)[1])

$$-\frac{d}{dU'}\left(\frac{W}{\cos U'}\right) = \frac{\sin U'}{\cos^2 U'} \cdot \frac{S}{W}$$

ist:

$$x_1 = R^{1/3} \cdot \int \frac{S}{W \cdot \cos U'}\,dU' - R^{4/3} c^2\,m\,V' + \text{const}$$

$$y_1 = R^{1/3}\left(R\,c^2\,m \operatorname{tg} U' \sin V' + \frac{W \cdot \cos V'}{\cos U'}\right) + \text{const}$$

$$z_1 = R^{1/3}\left(R\,c^2\,m \operatorname{tg} U' \cos V' - \frac{W}{\cos U'} \cdot \sin V'\right) + \text{const}.$$

[1]) Diese Tatsache ist auch unmittelbar aus der Differentialen abzulesen.

Da S und W nur von U' abhängen, so ist damit die Transformierte auf die Form gebracht:

$$x_1 = F(U') - m_1 V' \qquad y_1 = \Phi(U') \cdot \sin V' + \Psi(U') \cdot \cos V'$$
$$z_1 = \Phi(U') \cdot \cos V' - \Psi(U') \cdot \sin V';$$

sie ist also eine Schraubenfläche, deren Achse die X-Achse und deren Schraubungsparameter $m_1 = R^{4/3} c^2 m$ ist. Speziell für $R^2 = \pm 1$ folgt $m_1 = c^2 m$, und da die zweimalige Anwendung der Transformation zur Ausgangsfläche zurückführt: $m_2 = c_1^2 m_1 = c_1^2 c^2 m = m$, woraus (unabhängig von m) folgt: $c^2 c_1^2 = 1$[1]).

Satz XXVIII: Jede nach 57) und 65) mit den Konstanten c, m dargestellte Schraubenfläche vom Krümmungsmaß $k = \pm 1$ geht in eine mit den Konstanten $c_1 = \frac{1}{c}$, $m_1 = c^2 m$ dargestellte Schraubenfläche derselben Art über.

Dabei müssen die Schraubenlinien als Kurven konstanter mittlerer Krümmung wieder in Schraubenlinien übergehen. In der Tat ist $r_1^2 = y_1^2 + z_1^2$ nur von U' abhängig, also konstant, wenn r konstant ist. Da

$$r_1^2 = R^{4/3}(\cos^2 U' + R^2 c^2 - 1 - R^2 c^4 m^2)$$

ist, so folgt mit 64):

Satz XXIX: Bei der Transformation einer Schraubenfläche vom konstanten Krümmungsmaß $k = \frac{1}{R^2}$ gehen Schraubenlinien wieder in Schraubenlinien über, und die Radien der Zylinder entsprechender Schraubenlinien sind einander zugeordnet durch die Gleichung:

$$r_1^2 = R^{4/3}[c^2(r^2 + m^2) + (R^2 c^2 - 1 - R^2 c^4 m^2)].$$

Um das Azimut ω_1 eines Punktes der Transformierten zu bestimmen, setzen wir

$$\Phi(U') = r_1 \cdot \cos \alpha^2),$$

woraus
$$\cos \alpha = \frac{R c^2 m \operatorname{tg} U'}{\sqrt{\cos^2 U' + (R^2 c^2 - 1 - R^2 c^4 m^2}}$$

[1]) Gilt offenbar auch, wenn m gegen Null konvergiert.
[2]) Also $\Psi(U') = r_1 \cdot \sin \alpha$.

folgt. Dann nimmt die Transformierte die Form an:

$$x_1 = F(U') + m_1 \cdot \alpha(U') - m_1(\alpha + V') \quad y_1 = r_1 \cdot \sin(\alpha + V')$$
$$z_1 = r_1 \cos(\alpha + V');$$

also ist:

$$\omega_1 = \alpha(U') + V' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 70)$$

Speziell für Rotationsflächen ($m = 0$) wird

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ und nach 59) } V' = \frac{\omega}{R \cdot c},$$

also

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{R\,c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 70a)$$

In diesem Falle gehen also Meridiane wieder in Meridiane über, in Übereinstimmung mit Satz XXVI.

Bemerkungen:

1. Vergrößert man die Ausgangsfläche vom Krümmungsmaß ± 1 im Maßstabe $1:|R|$, so folgt nach S. 21 Fußnote für die Schraubungsparameter $\overline{m}$:

$$\overline{m} = m \cdot |R|, \quad \overline{m}_1 = m_1 \cdot |R|^{1/3}, \quad \overline{m}_2 = m \cdot |R|^{1/3};$$

andererseits:

$$\overline{m}^2 = R_1^{4/3} c_1^2 \overline{m}_1 = |R|^{25/9} \cdot c_1^2 c^2 m\,^1);$$

also durch Vergleichung:

$$c_1^2 = \frac{1}{R^{8/3} c^2}.$$

2. Ersetzt man in der Gleichung:

$$x_1 = F(U') + m_1 \cdot \alpha(U') - m_1 \omega_1$$

U' durch seinen Wert in r_1, so folgt nach längeren Zwischenrechnungen die Fläche in der Form 57), wobei

$$\varphi'(r_1) = -\frac{\sqrt{r_1^4 - r_1^2}\, R^{2/3} (R^2 c^2 - 1 - 2 R^2 c^4 m^2) + R^{16/3} c^6 m^2 (c^2 m^2 - 1)}{r_1 \sqrt{R^{8/3} c^2 (1 - c^2 m^2) - r_1^2}}$$

ist; daraus folgt durch Vergleichung mit 65) ebenfalls:

$$m_1 = R^{4/3} c^2 m \qquad c_1^2 = \frac{1}{R^{8/3} c^2} \qquad R_1 = R^{1/3}.$$

---

[1]) Wegen $R_1 = R^{1/3}$.

Es erübrigt noch eine Diskussion darüber, wann die betrachteten Flächen reell sind. Offenbar müssen in reellen Punkten m und r reell sein; ebenso haben wir R^2 reell vorausgesetzt. Nun ist nach 65) die Meridiankurve gegeben durch: $\varphi'(r) = \frac{\sqrt{Z}}{r \cdot N}$,

wo $Z = c^2 r^4 + r^2 (2 c^2 m^2 + c^2 R^2 - 1) + (c^2 m^4 - m^2)$

und $N = - c^2 r^2 + (1 - c^2 m^2)$

gesetzt ist.

Soll $\varphi(r)$ reell werden, so muß offenbar $\frac{Z}{N}$ positiv sein.

Nehmen wir nun an, c sei komplex, so werden Z und N beide komplex. Damit $\frac{Z}{N}$ positiv sei, müssen Z und N beide das Produkt aus einem reellen und demselben komplexen Faktor sein. Ist dieser eine Konstante, so ist er sämtlichen Koeffizienten von Z und R, also auch c^2 und $1 - c^2 m^2$, gemeinsam, was unmöglich ist; ist er eine Funktion ersten Grades von r^2, so muß der Rest der Division $Z : N$ verschwinden, was auf $c^2 = \frac{1}{m^2}$ führt, also bei komplexem c unmöglich ist.

Also führt komplexes c zu keinen reellen Flächen[1]).

Der weiteren Untersuchung legen wir die Voraussetzung $k = \pm 1$ zugrunde.

A. Es sei $R^2 = +1$:

Dann ist $Z = c^2 r^4 - r^2 (1 - 2 c^2 m^2 - c^2) - m^2 (1 - c^2 m^2)$ und $N = - c^2 r^2 + (1 - c^2 m^2)$.

Wir nehmen nun an:

a) c^2 negativ: In diesem Falle ist Z sowohl für $r = 0$ wie für $r = \infty$ negativ. Z geht durch Null für

$$r^2 = \frac{1 - 2 c^2 m^2 - c^2}{2 c^2} \pm \left| \sqrt{\left[\frac{1 - 2 c^2 m^2 - c^2}{2 c^2}\right]^2 + \frac{m^2 (1 - c^2 m^2)}{c^2}} \right|.$$

In diesem Ausdruck ist der Bruch vor dem $\pm$ negativ und kann, wie man leicht sieht, nie durch den Wurzelwert aufgehoben werden;

[1]) Ebensowenig $c^2 = 0$, wie man sofort sieht.

also ist Z für jedes positive r^2 negativ. Da aber N positiv ist, so führt negatives c^2 zu keiner reellen Fläche.

b) c^2 positiv: Hier unterscheiden wir:

α) $c^2 m^2 \geq 1$. In diesem Falle ist N immer negativ; da

$$Z = c^2 r^4 + c^2 r^2 + r^2 c^2 m^2 - r^2 (1 - c^2 m^2) - m^2 (1 - c^2 m^2)$$

immer positiv ist, so führt diese Annahme auch zu keinen reellen Flächen.

β) $c^2 m^2 < 1$: In diesem Falle geht der Nenner von $\varphi'(r)^2$ (sc.: $r^2 \cdot N$) durch Null für $r^2 = 0$ und für

$$r^2 = \frac{1 - c^2 m^2}{c^2} = r_{(0)}{}^2$$

und ist für $0 < r^2 < r_{(0)}{}^2$ positiv. Z geht durch Null für

$$r^2 = \frac{1 - 2 c^2 m^2 - c^2}{2 c^2} \pm \left| \sqrt{\left[\frac{1 - 2 c^2 m^2 - c^2}{2 c^2}\right]^2 + \frac{m^2 (1 - c^2 m^2)}{c^2}} \right|$$

wobei jetzt $\frac{m^2 (1 - c^2 m^2)}{c^2}$ positiv ist und daher immer der positive Wurzelwert und nur er auf ein reelles $r = r_{(1)}$ führt. Z ist für $r^2 = 0$ negativ, für $r^2 = \infty$ positiv und daher für $0 < r^2 < r_{(1)}{}^2$ negativ und für $r_{(1)}{}^2 < r^2 < \infty$ positiv.

Von den beiden Werten $r_{(0)}{}^2$ und $r_{(1)}{}^2$ ist aber $r_{(1)}{}^2$ der kleinere; denn es ist immer

$$r_{(1)}{}^2 = \frac{1 - c^2 m^2}{2 c^2} - \frac{1}{2}(1 + m^2) + \left| \sqrt{\left[\frac{1 - c^2 m^2}{2 c^2} + \frac{1 + m^2}{2}\right]^2 - \frac{1 - c^2 m^2}{c^2}} \right|$$

und wegen $\frac{1 - c^2 m^2}{c^2} > 0$

$$r_{(1)}{}^2 < \left[\frac{1 - c^2 m^2}{2 c^2} - \frac{1 + m^2}{2}\right] + \sqrt{\left[\frac{1 - c^2 m^2}{2 c^2} + \frac{1 + m^2}{2}\right]^2},$$

also $r_{(1)}{}^2 < r_{(0)}{}^2$.

Z und N haben also gleiches (und zwar positives) Zeichen nur für $r_{(1)}{}^2 < r^2 < r_{(0)}{}^2$. Wir haben daher den Fall der reellen sphärischen Schraubenflächen, deren Punkte bekanntlich zwischen zwei Zylindern von den Radien $r_{(1)}$ und $r_{(0)}$ liegen. Ihre

Transformierten haben die Konstanten $c_1^2 = \frac{1}{c^2}$ und $m_1^2 = c^4 m^2$, sodaß $c_1^2 > 0$ und $c_1^2 m_1^2 = c^2 m^2 < 1$ ist; sie gehören also zu derselben reellen Flächenklasse wie die Ausgangsflächen.

Bekanntlich ist das achsenfernste Element der Meridiankurve immer parallel der Achse ($\varphi'(r_{(0)}) = \infty$), das achsennächste Element senkrecht zu ihr ($\varphi'(r_{(0)}) = 0$), wenn $r_{(0)}$ nicht zugleich eine Nullstelle des Nenners von φ', also gleich 0 ist. Das ist aber nur möglich für $m = 0$ und $c^2 > 1$, also im Fall der Spindelfläche. Ihre Transformierte hat die Konstanten $m_1 = 0$, $c_1^2 < 1$, womit abermals bewiesen ist, daß sich Spindelfläche und Wulstfläche in bezug auf die Transformation entsprechen.

Dini weist noch auf zwei imaginäre Schraubenflächen konstanter positiver Krümmung hin, welche durch Schraubung einer imaginären Geraden erzeugt werden, indem er setzt:

$$c^2 m^2 = 1 \qquad m^2 = -1.$$

In diesem Falle ist also

$$c^2 = -1 \quad m = \pm i \text{ und daher } c_1^2 = -1 \quad m_1 = \mp i.$$

Also:

Satz XXX: Die beiden imaginären geradlinigen Schraubenflächen von der konstanten Krümmung $+1$ gehen ineinander über.

Fragen wir, welche Schraubenflächen durch die Transformation in sich selbst übergehen, so folgt aus Satz XXVIII: $c = \frac{1}{c}$, $m = c^2 m$, also $c^2 = 1$. Daraus folgt:

Satz XXXI: Es gibt ∞^1 Schraubenflächen vom Krümmungsmaß ± 1, die in sich selbst übergehen; ihre Konstanten sind $c^2 = 1$, m beliebig.

B. Es sei $R^2 = -1$.

Jetzt ist

$$Z = c^2 r^4 - r^2 (1 - 2 c^2 m^2 + c^2) - m^2 (1 - c^2 m^2)$$

und

$$N = -c^2 r^2 + (1 - c^2 m^2).$$

Z geht durch Null für

$$r_{(1)}^2 = \frac{1 - 2 c^2 m^2 + c^2}{2 c^2} \pm \sqrt{\left[\frac{1 - 2 c^2 m^2 + c^2}{2 c^2}\right]^2 + m^2 \frac{1 - c^2 m^2}{c^2}};$$

N geht durch Null für

$$r_{(0)}^2 = \frac{1 - c^2 m^2}{c^2}.$$

Wir wollen setzen:

$$\frac{1 - 2c^2 m^2 + c^2}{2c^2} = p \quad m^2 \cdot \frac{1 - c^2 m^2}{c^2} = q$$

$$r_{(1)}'^2 = p + |\sqrt{p^2 + q}| \quad r_{(1)}''^2 = p - |\sqrt{p^2 + q}|.$$

Wir nehmen nun an:

a) c^2 negativ, also $1 - c^2 m^2$ immer positiv; wir setzen $c^2 = -C^2$ und ebenso

$$p = -\frac{1 + 2C^2 m^2 - C^2}{2C^2} = -p' \quad q = -m^2 \cdot \frac{1 + C^2 m^2}{C^2} = -q'.$$

N ist jetzt immer positiv. Z ist negativ für $r^2 = \infty$ und für $r^2 = 0$, kann also nur dann dasselbe Zeichen wie N erhalten, wenn r^2 zwischen den beiden Werten von $r_{(1)}^2$ gelegen ist und wenn diese Werte reell sind. Damit $r_{(1)}^2 = -p' \pm \sqrt{p'^2 - q'}$ überhaupt reell sei, muß $q' < p'^2$ sein, was bei hinreichend kleinem m immer möglich ist. Da der Absolutwert von $\sqrt{p'^2 - q'}$ niemals den von p' übertreffen kann, so haben $r_{(1)}'^2$ und $r_{(1)}''^2$ immer dasselbe Zeichen wie $-p' = \frac{C^2(1 - 2m^2) - 1}{2C^2}$ und hönnen daher nur für $m^2 < \frac{1}{2}$ und $C^2 > 1$ positiv werden. Unter diesen Voraussetzungen folgen also reelle Schraubenflächen, z. B. für $m = 0$ die Rotationsfläche vom elliptischen (Kegel)-Typus. Für die Transformierten ist c_1^2 ebenfalls negativ, aber dem Absolutwert nach kleiner als 1, weshalb die Transformierten vollständig imaginäre Flächen sind.

b) c^2 positiv; wir unterscheiden:

a) $1 - c^2 m^2$ negativ, also $c^2 m^2 > 1$.

N wird negativ für jedes reelle r. Z ist sowohl für $r^2 = 0$ wie für $r^2 = \infty$ positiv, kann also nur dann mit N gemeinsames Zeichen haben, wenn $r_{(1)}'^2$ und $r_{(1)}''^2$ positiv sind und r^2 zwischen ihnen liegt. Da q negativ ist, so ist immer $|\sqrt{p^2 + q}| < |p|$ und $r_{(1)}^2$ nur dann positiv, wenn p positiv ist. Dann muß aber $c^2 > (2c^2 m^2 - 1)$ sein, was nur für $c^2 > 1$ möglich ist. Da für die

Transformierten $c_1^2 m_1^2 > 1$ aber $c_1^2 < 1$ ist, so sind die Transformierten ebenfalls vollständig imaginär.

β) $1 - c^2 m^2 = 0$. Dies ist der von Dini selbst behandelte Fall der Traktrix-Schraubenflächen. Die konstante Tangentenlänge der Meridiankurve ist bekanntlich $\sqrt{1 - m^2}$, und die Meridiankurve nur dann reell, wenn $m^2 < 1$ ist. Dann ist aber wegen $c^2 m^2 = 1$ immer $c^2 > 1$. Für die Transformierten dieser Flächen ist $c_1^2 m_1^2 = 1$ aber $c_1^2 < 1$, weshalb sie vollständig imaginär sind.

γ) $1 - c^2 m^2 > 0$ also $c^2 m^2 < 1$:

N ist positiv für $0 < r^2 < r_{(0)}^2$, negativ für $r_{(0)}^2 < r^2 < \infty$. Da q positiv ist, so ist von den beiden Werten von $r_{(1)}^2$ allein $r_{(1)}'^2$ positiv. Es ist aber:

$$r_{(1)}'^2 = \frac{1 - c^2 m^2}{2 c^2} + \frac{1 - m^2}{2}$$
$$+ \sqrt{\left[\frac{1 - c^2 m^2}{2 c^2} - \frac{1 - m^2}{2}\right]^2 + \frac{1 - c^2 m^2}{c^2}} > \frac{1 - c^2 m^2}{2 c^2}$$
$$+ \frac{1 - m^2}{2} + \sqrt{\left[\frac{1 - c^2 m^2}{2 c^2} - \frac{1 - m^2}{2}\right]^2}$$

also $r_{(1)}'^2 > r_{(0)}^2$. Nun ist Z negativ für $0 < r^2 < r_{(1)}'^2$, positiv für $r_{(1)}'^2 < r^2 < \infty$; also haben Z und N gleiches, und zwar negatives, Zeichen für $r_{(0)}^2 < r^2 < r_{(1)}'^2$. Wir bekommen also immer eine reelle Fläche, deren reelle Punkte zwischen zwei Zylindern vom Radius $r_{(0)}$ und $r_{(1)}'$ liegen, solange nur c^2 und $1 - c^2 m^2$ positiv sind. Dann sind aber offenbar auch c_1^2 und $1 - c_1^2 m_1^2$ positiv, also ist die Transformierte auch eine reelle Fläche[1]). Betrachtet man für diesen Fall die gegenseitige Zuordnung entsprechender Schraubenlinien nach Satz XXIX, so findet man, daß die reelle Schraubenlinie $r = r_{(0)}$ von Σ in die reelle Schraubenlinie $r_1 = r_{(0)_1}$ von Σ_1 übergeführt wird. Andererseits muß aber nach Satz XXI jeder reelle Punkt einer pseudosphärischen Fläche in einen imaginären Punkt übergehen. Dieser scheinbare

[1]) Hierher gehören auch diejenigen pseudosphärischen Flächen des Satzes XXXI, für welche $m < 1$ ist.

Widerspruch klärt sich auf, wenn man bedenkt, daß nach 70) (S. 57) das Azimut ω_1 jedes Punktes der Transformierten in $U' = \frac{U}{R}$ und $V' = \frac{U}{R}$ imaginäre Bestandteile enthält. Wir wollen das genauer an der pseudosphärischen Rotationsfläche vom hyperbolischen Typus verfolgen.

Ihre Meridiankurve ist definiert durch

$$\varphi'(r) = \frac{\sqrt{c^2 r^2 - (1 + c^2)}}{\sqrt{1 - c^2 r^2}},$$

wo nur c^2 positiv zu sein braucht. Alle ihre reellen Punkte liegen zwischen den beiden Zylindern $r^2 = \frac{1}{c^2}$ und $r^2 = \frac{1}{c^2} + 1$. Die Transformierte hat die Konstante $c_1{}^2 = \frac{1}{c^2} > 0$, ist also vom selben Typus. Dabei sind entsprechende Breitenkreise einander zugeordnet durch: $r_1{}^2 = -c^2 r^2 + c^2 + 1$; also entspricht dem engsten Breitenkreis $r^2 = \frac{1}{c^2}$ der Ausgangsfläche, der engste Breitenkreis $r_1{}^2 = \frac{1}{c^2}$ der Transformierten. Setzen wir auf der Ausgangsfläche $\omega = a$, so ist damit nach 70a) $\omega_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{ic}$ verbunden. Es entspricht also keinem reellen Meridian der Ausgangsfläche ein reeller Meridian der Transformierten.

Wir können daher diese Betrachtungen mit der Bemerkung beschließen:

Es gibt reelle pseudosphärische Flächen, aus denen durch die Hatzidakissche Transformation wieder reelle pseudosphärische Flächen folgen; aber dabei ist die Abbildung auf ihre Transformierten eine derartige, daß reellen Punkten der Ausgangsfläche imaginäre Punkte der Transformierten entsprechen.

Damit ist bewiesen, daß der Hatzidakisschen Transformation auch für die Theorie der pseudosphärischen Flächen eine reelle Bedeutung zukommen kann.

Lebenslauf.

Am 14. April 1887 wurde ich zu München geboren, woselbst ich auch das humanistische Gymnasium besuchte und 1906 absolvierte. Ich studierte sodann vier Semester an der K. Ludwig-Maximilians-Universität zu München Mathematik und legte 1908 den ersten Abschnitt der bayerischen mathematisch-physikalischen Lehramtsprüfung ab. Sodann studierte ich ein Semester an der K. Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin, dann wieder drei Semester an der Universität München Mathematik und bestand 1910 den zweiten Abschnitt der Lehramtsprüfung. Seitdem war ich wiederholt im K. Bayer. Mittelschuldienst aushilfsweise in Verwendung, studierte auch im Wintersemester 1911/12 nochmals an der Universität München Mathematik und Naturwissenschaften.

Allen meinen hochverehrten Lehrern, die sich um meine wissenschaftliche Ausbildung bemühten, sei auf diesem Wege mein aufrichtigster Dank dargebracht! Insbesondere danke ich Herrn Professor Voß in München, der mich nicht nur auf dieses interessante Gebiet der Flächentheorie aufmerksam machte, sondern mich auch bei der Fertigung dieser Arbeit stets mit seinem wohlwollenden Rate unterstützte.